

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

ÉCOLE DOCTORALE
DES SCIENCES MÉCANIQUES, ACOUSTIQUE, ÉLECTRONIQUE & ROBOTIQUE DE PARIS

Soutenue publiquement le 06 mai 2015 par

Audrey GINEAU

**MODÉLISATION MULTI-ÉCHELLE DE L'INTERACTION
FLUIDE-STRUCTURE DANS LES SYSTÈMES TUBULAIRES**

Dr. Élisabeth LONGATTE , <i>Lamsid, EDF R&D</i>	Co-directrice
Dr. Didier LUCOR , <i>IJLRDA, UPMC</i>	Co-directeur
Pr. Pierre SAGAUT , <i>Labo. M2P2, Aix Marseille Univ.</i>	Co-directeur
Dr. Olivier DOARÉ , <i>ENSTA Paritech</i>	Examineur
Pr. Christian GEINDREAU , <i>Labo. 3SR, Univ. Grenoble</i>	Rapporteur
Dr. Jean-Frédéric GERBEAU , <i>INRIA, Paris</i>	Examineur
Pr. Djimédo KONDO , <i>IJLRDA, UPMC</i>	Examineur
Pr. Olivier SIMONIN , <i>IMFT, Toulouse</i>	Rapporteur

RÉSUMÉ

Cette thèse a pour objectif de modéliser le couplage fluide-structure pouvant survenir dans les faisceaux tubulaires des réacteurs nucléaires. La simulation numérique fine de ces systèmes à taille réelle est hors de portée, motivant le recours à des approches de type multi-échelle: il s'agit de tirer profit du coût modeste d'une description macroscopique, et à la fois, de la précision des informations microscopiques. La dérivation du modèle macroscopique est basée sur une homogénéisation du problème équivalent défini à l'échelle microscopique, tandis que le modèle microscopique correspond à une description spatiale du problème vérifiant l'approximation du milieu continu.

Vis-à-vis des modèles existants, le travail de développement se focalise sur la prise en compte de la convection dans le calcul des champs hydrodynamiques, mais surtout, sur la possibilité de restituer des réponses vibratoires variées au sein d'un même faisceau ; soit la description de mouvements individuels propres à chaque structure.

L'homogénéisation aboutit à un système d'équations gouvernant les Interactions Fluide-Solide à une échelle macroscopique, dite cellulaire. Ces équations sont couplées par un terme source en quantité de mouvement, traduisant les charges hydrodynamiques exercées sur une structure donnée: cette force à modéliser représente une loi de fermeture du problème homogénéisé. La formulation retenue met en jeu des coefficients a priori inconnus. Une méthode d'estimation est donc proposée à partir des champs microscopiques obtenus par simulation de l'IFS sur un domaine réduit et représentatif du large système de référence.

Les capacités prédictives du modèle homogénéisé sont évaluées en comparaison avec des données de référence, issues de simulations numériques microscopiques dans des faisceaux de grande dimension. Chaque système référence présente une variété de réponses en déplacement que le modèle homogénéisé restitue avec un accord satisfaisant. Sur la base des tests réalisés, l'approche multi-échelle mise en œuvre fournit un bon compromis entre le coût des réalisations numériques et la précision attendue des données vibratoires et hydrodynamiques.

MOTS-CLÉS: Interaction fluide-structure, approche multi-échelle, homogénéisation, prise de moyenne volumique, milieux périodiques.

ABSTRACT

Vibration of cylinder arrays is a matter of design and safety assessments of industrial installations such as nuclear reactor cores or steam generators. Such complex systems count up from dozens to thousands of slender-bodies immersed in viscous flow, involving intricate multi-physics mechanisms caused by the strong nonlinear dynamic interactions between the fluid and the solid materials. Direct Numerical Simulations (DNS) for predicting fluid-solid interactions in cylinders arrays must derive from continuum mechanics, and require expensive computing resources because of the small(-micro) spatial scales involved for instance in the description of the near-wall flow. Therefore, one alternative to the costly micro-scale simulations consists in describing the interstitial fluid dynamics at the same scale as the structure one. Such approach may rely on homogenization techniques intended to model mechanical phenomena in multi-phase systems such as porous media.

The homogenization results in coupled governing equations for the fluid and solid dynamics, whose solution provides individual cylinder displacements and average fluid fields for each periodic unit cell. An hydrodynamic force term arises from the formulation within this set of homogenized equations: it represents the fluid loading exerted over one given slender-body. This hydrodynamic force is known to depend on the micro-scale flow in the vicinity of a given tube-wall, and therefore, needs to be estimated as a function of the macro-scale fields in order to close the homogenized problem. The fluid force estimation comes from the numerical micro-scale solution of fluid-solid interactions over a small size cylinder array, with mechanical properties representative of the whole system.

The multi-scale model is assessed for arrays made up of hundreds identical tubes, and compared with the reference solution resulting from the numerical micro-scale simulation of the equivalent system. The macro-scale solution reproduces with good agreement the averaged solution of the micro-scale simulation, indicating that the homogenization method and the hydrodynamic force closure are suitable for such tube array configurations.

KEYWORDS: Fluid-structure interaction, multi-scale approach, homogenization, volume averaging method, periodic media.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	2
1 Contexte industriel	2
2 Objectifs et méthodologie	5
3 Plan de la thèse	7
1 Homogénéisation des faisceaux de tubes immergés	10
1.1 Problème à l'échelle microscopique	11
1.2 Méthodes de changement d'échelle	12
1.2.1 Homogénéisation asymptotique	12
1.2.2 Prise de moyenne volumique	13
1.2.3 Influences des échelles	28
1.3 Problème à l'échelle macroscopique	31
1.3.1 Hypothèses	31
1.3.2 Choix de la méthode de moyenne	33
1.3.3 Modélisation	39
2 Fermeture des charges hydrodynamiques	44
2.1 Régime vibratoire en faisceaux	46
2.2 Modèle de fermeture	49
2.2.1 État de l'art	49
2.2.2 Formulation pour le problème homogénéisé	52
2.3 Estimation numérique des coefficients hydrodynamiques	56
2.3.1 Approche numérique multi-échelle	56
2.3.2 Domaine réduit représentatif	58
2.4 Sensibilité aux paramètres adimensionnels	60
2.5 Représentativité des coefficients	64
3 Résolution numérique du problème macroscopique	70
3.1 Algorithme de base dans <i>Code_Saturne</i>	71
3.2 Variables surfaciques macroscopiques	76
3.3 Algorithme du problème homogénéisé	79
3.4 Traitement numérique des singularités macroscopiques	82
3.4.1 Estimation du gradient au voisinage de singularités	83
3.4.2 Résolution en maillage par cellule de base	87

4 Vibrations à 1DDL et amorties au cours du temps	92
4.1 Faisceaux de tubes cylindriques	94
4.1.1 Système de référence microscopique	94
4.1.2 Paramètres numériques macroscopiques	97
4.1.3 Vibrations en fluide initialement au repos	98
4.1.4 Vibrations sous écoulement transverse	106
4.1.5 Vibrations à haute fréquence	112
4.2 Faisceau de tubes hexagonaux	117
4.2.1 Adaptation du problème homogénéisé	117
4.2.2 Système de référence microscopique	119
4.2.3 Mise en données du problème homogénéisé	121
4.2.4 Comparaison micro/macro	123
4.3 Apports en termes de gain CPU	131
5 Vibrations à 2DDL et amorties au cours du temps	134
5.1 Faisceaux de tubes cylindriques	135
5.2 Faisceau de tubes hexagonaux	143
6 Vibrations à 1DDL et auto-entretenues au cours du temps	148
6.1 Configuration du système de référence	149
6.2 Fermeture des forces hydrodynamiques	150
6.3 Application au problème homogénéisé	153
Conclusion générale	158
Annexes	168
A Théorèmes de la prise de moyenne	170
A.1 Permutation Intégrale volumique - Dérivée spatiale	170
A.2 Permutation Intégrale volumique - Dérivée temporelle	172
B Généralités sur les lois de bilan	174

NOMENCLATURE

\mathbf{n}_α	vecteur normal unitaire sortant du domaine de la phase α
\mathbf{u}_α	champ de déplacement microscopique de la phase α
\mathbf{V}_α	champ de vitesse macroscopique de la phase α
\mathbf{v}_α	champ de vitesse microscopique de la phase α
γ_α	fonction de distribution de la phase α
$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_\alpha$	tenseur des contraintes microscopiques de la phase α
ϕ_α	fraction volumique ou porosité de la phase α
ρ_α	masse volumique de la phase α
ε_α	fraction surfacique ou porosité de surface de la phase α
d	dimension caractéristique d'un VER
L	dimension caractéristique du système matériel hétérogène
l	dimension caractéristique des pores

Paramètres fluide

μ	viscosité dynamique d'un écoulement
ν	viscosité cinématique d'un écoulement
p	champ de pression
U_∞	norme de la vitesse fluide incidente

Paramètres structure

c_a	amortissement ajouté
D	diamètre d'un cylindre
dz	longueur de l'axe du cylindre
f_s	fréquence propre structure

k	raideur propre d'une structure
m	masse propre d'une structure
m_a	masse ajoutée
P	pas d'un faisceau

Paramètres adimensionnels

Kc	nombre de Keulegan-Carpenter: $Kc = \frac{U_\infty}{f_t D}$
m^*	rapport de masse: $m^* = \frac{\rho_s}{\rho_f}$
P^*	pas réduit: $P^* = \frac{P}{D}$
Re	nombre de Reynolds: $Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$
St	nombre de Stokes: $St = \frac{f_s D^2}{\nu}$
U_r	vitesse réduite: $U_r = \frac{U_\infty}{D f_s}$

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1 Contexte industriel

Enjeux numériques

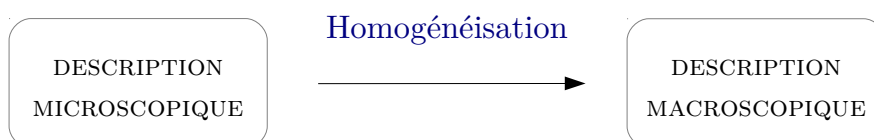
Le dimensionnement et la maintenance des centrales nucléaires représentent des enjeux de performance et de sûreté majeurs pour les installations du parc électrique français. En ce sens, il est essentiel d'être en mesure de prédire le comportement thermo-mécanique des composants de réacteurs afin de contrôler leur tenue au cours du temps. Les informations obtenues par mesures sur maquettes réduites sont progressivement complétées par des calculs numériques en mécanique: cela permet d'envisager une gamme variée de scénarii de fonctionnement dans des délais raisonnables. Néanmoins, les ruptures technologiques attendues par le déploiement des «nouvelles générations» de réacteurs et l'évolution des critères de sûreté constituent autant d'éléments qui nécessitent constamment d'enrichir les modèles de calculs afin de pérenniser et/ou de garantir leurs capacités prédictives.

La simulation numérique en mécanique a connu un essor considérable grâce au récent déploiement des architectures de calcul massivement parallèles, soit du *High Performance Computing (HPC)*. Pour des temps de calculs toujours plus courts, de nombreuses applications industrielles bénéficient d'une quantité de données scientifiques de plus en plus importante. Néanmoins, plusieurs obstacles liés au "*big data*" restent à franchir pour envisager une simulation fidèle et détaillée de certains systèmes complexes de grande dimension.

Les milieux dits *hétérogènes* ou *multi-phasiques* sont particulièrement concernés par cette problématique. Il s'agit par exemple des matériaux composites, des milieux poreux ou encore des mélanges de fluides non-miscibles. Dans les réacteurs nucléaires, certains composants sont considérés comme hétérogènes ou poreux: tel est le cas des générateurs de vapeur et cœurs de réacteur, constitués de larges arrangements de tubes immergés. Ces systèmes mettent en jeu des phénomènes physiques complexes, impliquant des interactions entre mécanismes d'origine et de nature différentes: cela peut concerner la neutronique, la thermique, l'hydrodynamique, ainsi que la vibration ou la corrosion des structures solides.

Pour décrire numériquement, et avec précision, la physique de tels milieux, le maillage retenu doit être suffisamment fin pour restituer la morphologie complexe du domaine. Cette résolution spatiale importante entraîne le calcul de nombreux degrés de liberté, rendant inaccessible la simulation à taille réelle de certains systèmes: par exemple, il faudrait envisager plusieurs années de calcul pour simuler la thermohydraulique "fine" des cœurs et générateurs de vapeur (Bieder et Graffard [8]).

Pour contourner cette difficulté et réduire le nombre de degrés de liberté à calculer, une alternative consiste à utiliser des *modèles statistiques*, fournissant une description spatiale "plus large" des phénomènes. : en d'autres termes, on s'affranchit des informations fines, ou *microscopiques*, pour adopter une vision globale, ou *macroscopique*. La modélisation macroscopique des milieux hétérogènes dérive généralement d'une procédure dite de **changement d'échelle** ou d'**homogénéisation** vis-à-vis du niveau d'observation microscopique.



Les études actuelles en thermohydraulique des composants de réacteurs nucléaires ont recours à des codes de calculs basés sur une approche homogénéisée. Ces codes fournissent des informations dont la résolution spatiale est au moins de l'ordre du diamètre d'une structure élémentaire: un crayon combustible pour les cœurs ou un tube pour les générateurs de vapeur¹. La Figure 1 illustre le niveau de description obtenue par la simulation numérique de la thermohydraulique d'un cœur de réacteur à l'aide du logiciel TRIO_U (Tenchine et al. [72]).

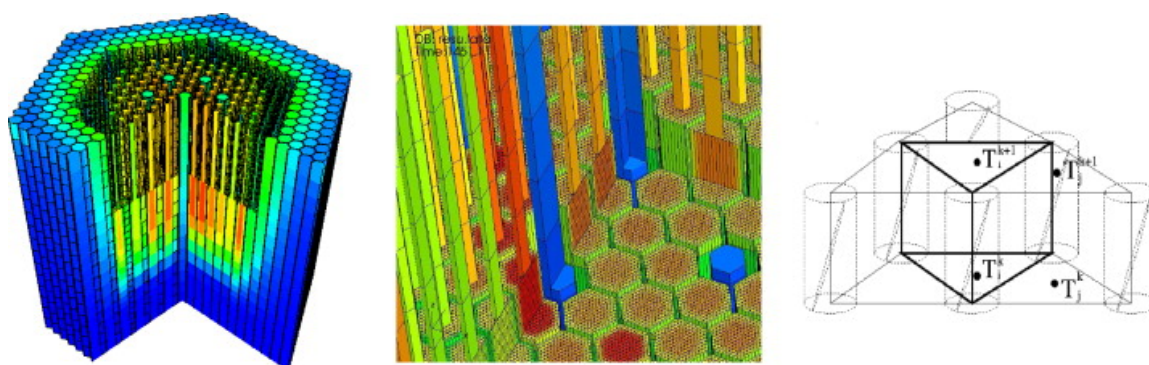


FIGURE 1 – Simulation numérique de la thermohydraulique du cœur de PHENIX à l'échelle inter-crayon, dite "sous-canal", avec le logiciel TRIO_U (CEA [72]).

1. En contexte industriel, ces logiciels sont désignés comme *code composant*, ou encore *Code à l'échelle composant*. Les logiciels THYC (EDF R&D), FLICA et TRIO_U (CEA) ou encore COBRA-FLX (AREVA) en sont des exemples.

Visée applicative

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans le cadre d'un projet de recherche sur les réacteurs de 4^{ème} Génération et contribuent à l'optimisation des modèles de calculs dynamiques des cœurs de Réacteurs à Neutrons Rapides refroidis au sodium (RNR-Na).

Le cœur d'un RNR-Na est constitué de quelques centaines d'assemblages combustibles disposés en « nids d'abeilles » et immergés dans le sodium liquide² que contient la cuve. Le nombre d'assemblages dans un cœur dépend du réacteur considéré: par exemple on en dénombre 103 pour le prototype *PHENIX* et 364 pour *SUPERPHENIX*. Chaque assemblage est lui-même constitué d'un arrangement de crayons combustibles délimité par un boîtier de section hexagonale. De tels arrangements de crayons et/ou d'assemblages combustibles sont désignés **faisceaux de tubes**. Au cours de son fonctionnement, le cœur de *PHENIX* (1973 – 2009) a subi des Arrêts d'Urgence par franchissement du seuil de Réactivité Négative (événement communément désigné AURN). L'écartement d'une couronne d'assemblages, ou encore le **gerbage du cœur**, est à ce jour mis en cause dans l'apparition des AURN. Pour prévenir ce phénomène, il est nécessaire de disposer d'un modèle de calcul capable de décrire les réponses vibratoires du cœur en interaction avec l'écoulement du fluide caloporteur: le retour d'expérience sur *PHENIX* révèle que la présence du sodium liquide impacte les oscillations des assemblages combustibles de manière significative (Dumaz et al. [17]).

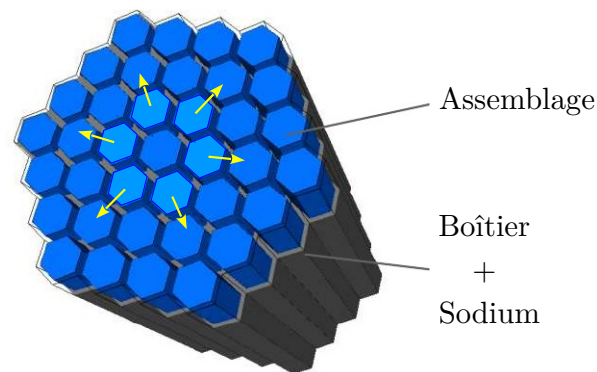


FIGURE 2 – Schématisation d'un cœur RNR-Na

La maîtrise du risque vibratoire représente également un enjeu pour les systèmes tubulaires des Réacteurs à Eau Pressurisée (REP) a minima: dans les assemblages de cœurs de REP immergés dans l'eau caloporteuse et exposés au risque sismique, ou encore, dans les générateurs de vapeur³, où un écoulement de forte intensité turbulente peut induire la vibration des tubes, entraînant leur endommagement par chocs et/ou rupture.

2. En fonctionnement nominal du cœur, la température du sodium liquide varie entre 300°C et 550°C.

3. Les générateurs de vapeur sont des composants de centrales nucléaires constitués de plusieurs milliers de tubes en forme de U inversé.

La vibration des cœurs et générateurs de vapeur est généralement liée à de fortes interactions avec l'écoulement environnant. De ce fait, les modèles de calculs retenus pour simuler les réponses mécaniques de ces systèmes doivent au mieux rendre compte de la dynamique du fluide. La simulation microscopique d'un composant complet étant hors de portée, l'homogénéisation constitue une alternative intéressante pour en décrire les interactions fluide-structure: il s'agit de restituer les effets dynamiques survenant aux interfaces fluide-solide, sans avoir à considérer le détail des mécanismes en jeu.

L'homogénéisation est appliquée par Sigrist et Broc [65] et Ricciardi et *al.* [59, 58] pour l'analyse sismique des cœurs. Ils s'inspirent des formalismes mathématiques de *changement d'échelle* destinés à la modélisation des milieux poreux pour décrire le déplacement des crayons combustibles en interaction avec le fluide caloporteur. Cependant, les hypothèses sous-jacentes à ces modèles ne permettent pas d'envisager des réponses vibratoires différentes entre les structures mobiles: en effet, les tubes étant sollicités par une même force sismique, ils sont supposés présenter des réponses vibratoires similaires. Pour une analyse sismique, l'hypothèse de mouvement d'ensemble semble donc être admissible, mais représente un verrou de taille pour les problématiques de gerbage.

2 Objectifs et méthodologie

On se propose de construire un modèle homogénéisé capable de décrire les interactions dynamiques entre structures et écoulements dans les faisceaux de grande taille, en adoptant un niveau de description macroscopique. La restitution des réponses vibratoires propres à chaque structure élémentaire des systèmes considérés est un enjeu important. Il s'agit là d'un aspect central pour appréhender le gerbage des cœurs de RNR-Na, se caractérisant par un «écartement» des assemblages, impliquant des mouvements singuliers entre les structures. Le modèle proposé vise une application aux arrangements de tubes immergés, de forme cylindrique ou hexagonale, et soumis à une force extérieure pouvant induire un mouvement de type gerbage.

À cette fin, une **approche multi-échelle** est adoptée. La méthodologie mise en œuvre est schématisée à la Figure 3: elle permet de tirer profit du coût très modeste des calculs macroscopiques et à la fois, de la finesse des informations fournies par le niveau de description microscopique. De plus, les simulations microscopiques visent à fournir deux types d'informations:

1. des données destinées à la résolution et à l'enrichissement du modèle macroscopique: c'est en ce sens que la méthode proposée dans cette thèse est qualifiée de *multi-échelle*.
2. des données de référence sur les réponses mécaniques des faisceaux de grande taille pour évaluer les capacités prédictives du modèle macroscopique.

Tout calcul numérique - microscopique ou macroscopique - est réalisé avec *Code_Saturne*⁴. Il s'agit d'un logiciel de calcul en mécanique des fluides développé par EDF R&D [3] et qui est dédié à la simulation numérique des écoulements monophasiques. Différents modules permettent de tenir compte, ou non, des phénomènes de dilatation, la turbulence ou encore transferts de chaleur. A l'échelle microscopique, il permet notamment de simuler les interactions dynamiques entre une paroi rigide en mouvement et un écoulement de fluide monophasique (Huvelin [29], Jus [31], Berland & Deri [6], Longatte et al. [38]).

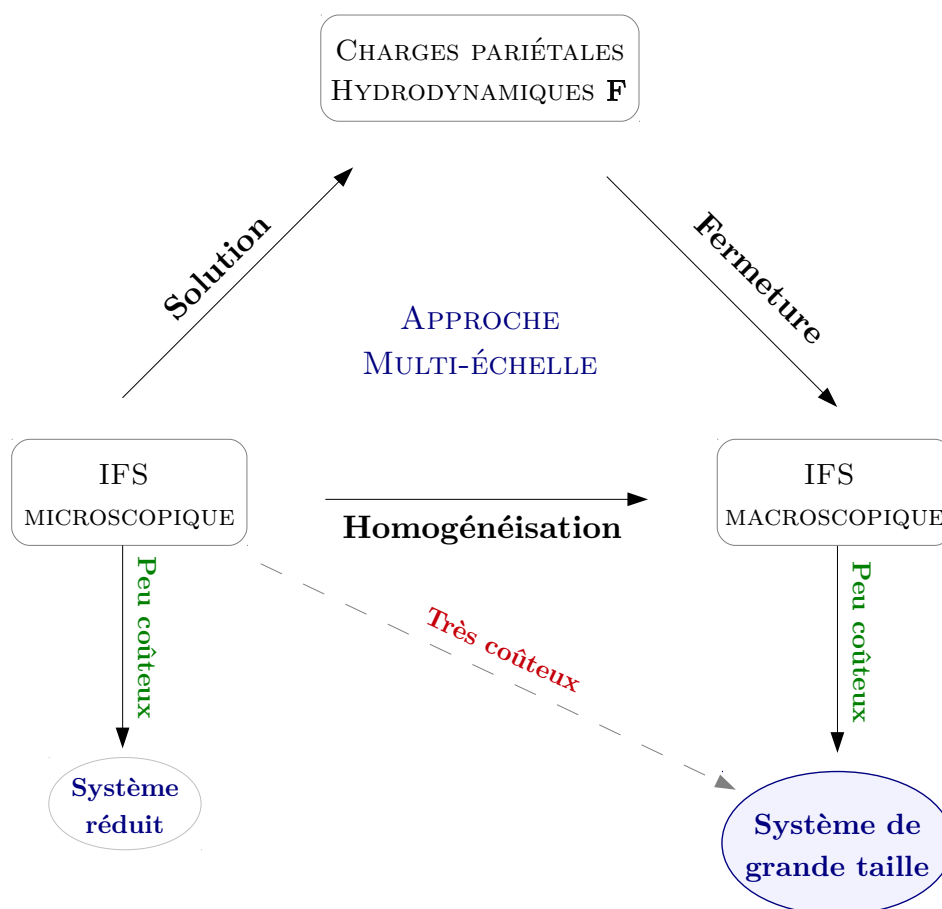


FIGURE 3 – **Méthodologie de la thèse**: L'interaction fluide-structure (IFS) est modélisée à l'échelle macroscopique par l'homogénéisation du problème équivalent, gouverné à l'échelle microscopique. La dérivation du problème macroscopique met en jeu une quantité inconnue \mathbf{F} traduisant le couplage entre les dynamiques fluide et solide, et représentant les charges pariétales hydrodynamiques exercées sur une structure tubulaire. Cette quantité inconnue est estimée à partir de la solution du problème d'IFS microscopique obtenue sur un système tubulaire réduit, de propriétés mécaniques équivalentes à celles du système de référence de grande taille.

4. Logiciel en simulation CFD, open source sous licence GPL: <http://code-saturne.org>

3 Plan de la thèse

CHAPITRE 1 Ce chapitre est dédié aux méthodes d'homogénéisation par prise de moyenne volumique. Cette méthode, couramment adoptée pour modéliser les phénomènes de transport dans les milieux poreux, fait l'objet d'une description détaillée pour rendre compte de son adéquation vis-à-vis des informations attendues sur les systèmes tubulaires. Les équations de bilan gouvernées par l'écoulement macroscopique dérivent de l'intégration des équations équivalentes, définies à l'échelle du milieu continu et écrites sous forme intégrale: elles aboutissent à un couplage avec les équations de dynamique pour les structures par la présence d'un terme traduisant les contraintes d'interface entre les phases fluide et solide. Ces contraintes, ou forces hydrodynamiques, doivent être exprimées à l'aide des champs macroscopiques afin de rendre le problème homogénéisé soluble.

CHAPITRE 2 La littérature présente de nombreux travaux destinés à la formulation de modèles pour l'évaluation des forces hydrodynamiques exercées sur des tubes cylindriques. Pour fermer le problème macroscopique, une écriture des efforts fluides est proposée à partir des formulations existantes. Le problème microscopique équivalent est résolu numériquement sur un domaine réduit, dont les propriétés mécaniques sont représentatives de celles caractérisant le large système à modéliser. La solution microscopique issue du domaine réduit permet d'estimer l'ensemble des coefficients mis en jeu dans le modèle de force retenu. La sensibilité des coefficients au régime vibratoire et au régime de l'écoulement est mise en évidence, et la représentativité d'un domaine réduit vis-à-vis d'un large système de référence est discutée.

CHAPITRE 3 L'expression des charges hydrodynamiques à l'aide des grandeurs macroscopiques et l'estimation des coefficients hydrodynamiques sont les conditions requises pour envisager la résolution numérique du problème homogénéisé. L'algorithme de résolution et les schémas numériques retenus sont basés sur des méthodes existantes dans *Code_Saturne*. Par ailleurs, les schémas numériques disponibles pour le calcul des gradients sont d'ordre 2, ce qui est trop élevé pour un traitement adéquat des singularités du champ de déplacement des structures. Pour contourner cette difficulté et conserver l'ordre des schémas existants, une alternative est proposée: elle consiste à discrétiser chaque cellule de base en un nombre de mailles suffisant afin de garantir une estimation adéquate des gradients au voisinage de singularités.

CHAPITRE 4 La résolution du problème homogénéisé est appliquée pour différentes configurations de faisceaux. Les données de référence, permettant de valider les résultats macroscopiques, sont issues de simulations numériques microscopiques des larges systèmes tubulaires équivalents. Le problème est tout d'abord résolu pour des faisceaux de cylindres, constitués d'environ 400 tubes en vibrations amorties au cours du temps. Une seconde application est mise en œuvre pour un faisceau de tubes à section hexagonale, de topologie similaire à celle

des cœurs de RNR-Na. Pour l'ensemble des configurations traitées, le régime d'écoulement est laminaire et les vibrations sont amorties au cours du temps, suivant 1 degré de liberté par structure. La comparaison entre les solutions macroscopiques et microscopiques fournit des résultats encourageants pour l'approche multi-échelle.

CHAPITRE 5 Ce chapitre présente les mêmes motivations que celle du *Chapitre 4*, mais pour des vibrations suivant 2 degrés de liberté par structure. Pour ce type de configuration, le modèle macroscopique présente également des capacités prédictives satisfaisantes.

CHAPITRE 6 Ce chapitre met en évidence des questions ouvertes sur l'adéquation, l'amélioration et l'extension de l'approche multi-échelle proposée vers des applications plus complexes, nécessitant d'approfondir les travaux. En particulier, on évalue si l'approche multi-échelle proposée est adaptée aux systèmes tubulaires présentant un *couplage fluide-élastique* non-négligeable. De même que pour des oscillations amorties au cours du temps, la représentativité des coefficients hydrodynamiques est analysée quantitativement dans le cadre d'un *régime vibratoire auto-entretenu*, et les réponses vibratoires issues de la résolution du problème homogénéisé correspondant sont discutées.

Chapitre 1

HOMOGENÉISATION DES FAISCEAUX DE TUBES IMMERGÉS

Sommaire

1.1	Problème à l'échelle microscopique	11
1.2	Méthodes de changement d'échelle	12
1.2.1	Homogénéisation asymptotique	12
1.2.2	Prise de moyenne volumique	13
1.2.3	Influences des échelles	28
1.3	Problème à l'échelle macroscopique	31
1.3.1	Hypothèses	31
1.3.2	Choix de la méthode de moyenne	33
1.3.3	Modélisation	39

Ce chapitre est consacré à l'écriture d'un problème homogénéisé visant à décrire les réponses vibratoires d'un grand nombre de structures tubulaires immergées dans un écoulement dense et visqueux. Le principe de la méthode consiste à assimiler l'arrangement de structures à un milieu poreux en faisant appel aux formalismes de changement d'échelle destinés à la modélisation de ces systèmes hétérogènes. Cette approche a fait l'objet de plusieurs travaux, notamment pour l'optimisation des modèles de calcul pour les composants de réacteur nucléaires: citons Jacquelin et *al.* [30], Hammami [23], Sigrist et Broc [65] et Ricciardi [58, 59]. Pour traiter ce problème, deux grandes voies existent dans la littérature: l'homogénéisation asymptotique et la prise de moyenne volumique.

Dans un premier temps, le système d'équations gouvernant le problème à l'échelle microscopique (ou du *milieu continu*) est introduit. Le principe de la méthode d'homogénéisation asymptotique et les travaux dont elle fait l'objet pour l'étude des faisceaux de tubes sont ensuite abordés. Enfin, les méthodes de changement d'échelle par prise de moyenne sont présentées dans un cadre général, puis adaptées à la description des interactions dynamiques entre les phases fluide et solide dans les systèmes tubulaires.

1.1 Problème à l'échelle microscopique

Les systèmes concernés par cette étude se présentent comme des arrangements de structures élancées en immersion dans un fluide suffisamment dense et visqueux pour que son écoulement impacte la vibration de ces dernières (Figure 1.1). De ce fait, le problème défini à l'échelle du milieu continu est gouverné par un système d'équations couplées, définies dans chaque sous-domaine fluide Ω_f et solide Ω_s : la dynamique du fluide est gouvernée par les équations de *Navier-Stokes* pour un écoulement incompressible, et la dynamique d'une structure correspond à celle d'un oscillateur harmonique non-amorti dans le vide. Les interactions fluide-structures sont alors gouvernées par le système d'équations suivant:

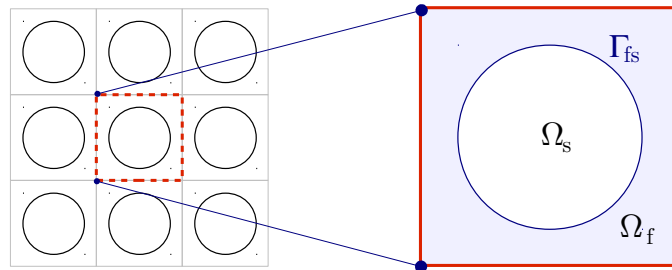


FIGURE 1.1 – **Système tubulaire immergé**: Les structures sont représentées par le domaine solide Ω_s et le fluide interstitiel par le domaine Ω_f

ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES Ω_f

En tenant compte de l'hypothèse d'incompressibilité pour l'écoulement, les équations de bilan

de masse, et de quantité de mouvement définies dans Ω_f prennent la forme locale suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f) = 0 \\ \frac{\partial(\rho_f \mathbf{v}_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_f + {}^t \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_f)] \end{array} \right.$$

ÉQUATION D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE SUR Ω_s

Le domaine solide est gouverné par la dynamique d'un oscillateur harmonique, non-amorti dans le vide et dont les efforts extérieurs sont exclusivement de nature hydrodynamique, soit:

$$\bar{\bar{M}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \bar{\bar{K}} \mathbf{u}_s = \int_{\Gamma_{fs}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s \cdot \mathbf{n}_s ds$$

CONTINUITÉ À L'INTERFACE Γ_{fs}

À interface fluide-structure, les champs de vitesse et de contrainte vérifie les conditions de continuité suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s \cdot \mathbf{n}_s \end{array} \right.$$

1.2 Méthodes de changement d'échelle

1.2.1 Homogénéisation asymptotique

Bensoussan et al. [5], Sanchez-Hubert et Sanchez-Palancia [62] ont développé une méthode d'homogénéisation asymptotique pour les systèmes hétérogènes et spatialement périodiques. Cette approche nécessite de considérer un petit paramètre de confinement ε défini par :

$$\varepsilon = \frac{l}{L},$$

l étant la longueur caractéristique de l'échelle microscopique (soit la taille d'un pore) et L , la longueur caractéristique de l'échelle macroscopique (soit la taille du niveau d'observation souhaité). Cette méthode permet de formuler un problème "simplifié", ou d'ordre réduit, à partir du développement asymptotique du problème exact autour de ε . Les grandeurs inconnues ϕ du problème exact sont alors recherchées sous la forme d'un développement en échelles multiples:

$$\phi(t, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \phi_n(t).$$

Le problème à résoudre est finalement gouverné par les équations vérifiées par les fonctions ϕ^n , obtenues par *simplification* et/ou *réduction* de l'ordre des équations vérifiées par ϕ .

Jacquelin et *al.* [30] appliquent cette méthode pour modéliser le comportement dynamique d'un faisceau de 16 assemblages de REP, tous sollicités par un signal de force sinusoïdal ou quelconque. La dynamique des assemblages est en interaction avec celle d'un fluide très peu dense – de l'air – dont l'écoulement est supposé incompressible, irrotationnel et de viscosité négligeable. Chaque assemblage représente une structure élémentaire, gouvernée par le modèle de poutre d'Euler-Bernouilli et l'enjeu réside dans la modélisation des forces de contact, l'écoulement ayant peu d'impact sur la dynamique vibratoire des tubes considérés.

Dans le cadre des mêmes hypothèses que Jacquelin et *al.* [30] sur l'écoulement, Hammami [23] opte pour l'homogénéisation de l'interaction fluide-structure pour modéliser les mouvements d'assemblages au sein du cœur d'un RNR-Na. Le problème est considéré dans le plan de la section droite des assemblages, chacun gouverné par un modèle d'oscillateur harmonique. Le modèle homogénéisé est validé à partir des essais sismiques en eau et en air de la maquette cœur Rapsodie¹. L'étude de sensibilité du modèle à la nature du fluide met en évidence la nécessité de décrire fidèlement l'évolution de la pression moyenne avoisinant les structures. L'adéquation entre le modèle de Hammami [23] – particulièrement en eau – et les mesures expérimentales est qualitativement encourageante et représente un progrès important pour ce type d'approche.

L'hypothèse de linéarisation inhérente à la méthode restreint la restitution fidèle de l'écoulement, en particulier si des phénomènes de transport convectif (phénomènes non-linéaires) sont impliqués de manière significative. Pour cette raison, l'homogénéisation asymptotique ne fait pas l'objet d'une étude approfondie dans le cadre de cette thèse.

1.2.2 Prise de moyenne volumique

La méthode de prise de moyenne est une procédure de changement d'échelle permettant d'écrire le problème mathématique gouverné par les phénomènes de transport moyen au sein d'un milieu hétérogène. La prise de moyenne vise à passer de l'échelle *microscopique* où la matière se présente comme une juxtaposition de phases distinctes, à une plus grande échelle - dite *globale* ou *macroscopique* - où le caractère hétérogène du milieu est oublié. L'échelle macroscopique se caractérise par un **Volume Élémentaire Représentatif (VER)** dont les dimensions et la forme sont conditionnées par le niveau de description spatiale souhaité: l'étape préliminaire au changement d'échelle est donc la définition d'un VER approprié au type de phénomènes macroscopiques que l'on souhaite rendre compte.

Cette procédure de changement d'échelle consiste à appliquer un opérateur de moyenne spatiale aux équations gouvernant le problème à l'échelle du *milieu continu*, ces dernières étant généralement écrites sous forme *locale*: c'est en ce sens qu'il s'agit d'une **prise de moyenne locale**. Des théorèmes de permutation entre les opérateurs d'intégration et de dérivation permettent d'obtenir le problème macroscopique équivalent.

1. Rapsodie est une maquette réduite du cœur de SUPERPHENIX à l'échelle 1/3. Elle représente 5 couronnes d'assemblages combustibles de section hexagonale, soit 91 éléments au total.

Le changement d'échelle à partir des équations de bilan sous *forme locale* est la méthode la plus répandue dans la littérature, introduite notamment par Slattery [66], Whitaker [75, 76]. Ces auteurs ont essentiellement appliqué cette méthode à la modélisation des milieux considérés comme poreux, tels que les roches sédimentaires, les aquifères ou les bétons et ciments. Elle fait cependant l'objet de plusieurs travaux visant à décrire les écoulements dans les systèmes tubulaires industriels, car elle présente l'avantage de pouvoir se combiner à la modélisation de la turbulence (De Lemos [36]). Ainsi, les équations gouvernant un écoulement turbulent en milieu poreux s'obtiennent par l'application successive de deux filtres: d'abord la moyenne statistique liée à la méthode Reynolds-Average-Navier-Stokes (RANS), puis la moyenne volumique locale qui, à la différence de la précédente, est spatiale. La prise de moyenne des équations locales est récemment utilisée dans les travaux de Chanderis [12, 11], Drouin [15, 16] et de Angeli [1], pour modéliser la thermohydraulique dans des faisceaux de tubes, considérés fixes et indéformables.

Dans le cadre de l'analyse vibratoire des cœurs de REP, Ricciardi [58, 59] assimile chaque assemblage combustible à un milieu poreux et propose une méthode de moyenne locale visant à modéliser les déplacements des assemblages en interaction avec un écoulement axial et turbulent. Le formalisme de Ricciardi présente la particularité d'utiliser des filtres de même nature – spatiale – pour décrire les effets de la turbulence et ceux liés à l'échelle poreuse : l'écoulement au sein des assemblages est modélisé à l'aide du modèle Large-Eddy Simulation (LES) (Sagaut [61]). L'interaction fluide-structure pour différents prototypes de cœurs est simulée numériquement et comparée à des mesures vibratoires obtenues sur maquettes réduites équivalentes. Cependant, la distance entre assemblages est considérée constante au cours du temps et limite le champ d'application de la méthode à des mouvements d'ensemble.

Les travaux de Hassanizadeh et Gray [24, 25, 21] interrogent la pertinence de la prise de moyenne locale: ils estiment que la nature surfacique des quantités microscopiques devrait être restituée dans la formulation d'un problème macroscopique issu d'une procédure de changement d'échelle. De ce fait, ils suggèrent une prise de moyenne des équations microscopiques écrites sous une forme intégrale.

Dans ce chapitre, le développement d'une méthode de prise de moyenne "*non-locale*" est proposé, largement inspiré des réflexions menées par Hassanizadeh et Gray: il s'agit de moyenner les équations du milieu continu sous forme intégrale, plutôt que celle écrites sous forme locale. Les deux possibilités de prise de moyenne sont ensuite analysées et comparées en vue d'une application à l'homogénéisation du comportement vibratoire des faisceaux de tubes.

Dans la suite, le cadre et les outils mathématiques permettant de procéder aux prises de moyenne des équations de bilan microscopiques sont tout d'abord introduits.

Volumes de contrôle et référentiels de description

Le changement d'échelle par prise de moyenne nécessite de distinguer deux types de volumes élémentaires strictement inclus dans S (Figure 1.2) :

- $d\Omega$ est le volume d'observation - ou de *contrôle* - des phénomènes **microscopiques**, dans lequel est réalisé le bilan de matière dans le cadre de l'approximation du milieu continu.
- Ω représente le volume d'observation des phénomènes **macroscopiques**, dans lequel est réalisé l'homogénéisation de la matière hétérogène et discontinue.

Ces volumes de contrôle se caractérisent par la condition suivante:

$$|d\Omega| \ll |\Omega| \quad (1.1)$$

Le volume Ω est défini comme le **Volume Élémentaire Représentatif** - ou **VER** - des phénomènes macroscopiques: sa forme, ses dimensions et son orientation spatiale sont **invariables** au cours du temps et en espace. Tout milieu hétérogène considéré est constitué de deux phases *distinctes* et *non-miscibles* désignées α et β qui, à l'échelle du milieu continu, appartiennent respectivement aux domaines matériels Ω_α et Ω_β . Ainsi, le volume est défini comme un mélange de phases α et β tel que $\Omega = \Omega_\alpha \cup \Omega_\beta$.

On distingue le système de variables (x_1, x_2, x_3, t) qui repère la position du centre d'un volume macroscopique Ω du système de variables (ξ_1, ξ_2, ξ_3, t) qui repère la position d'une particule microscopique $d\Omega$ relativement au centre du volume auquel elle appartient (Figure 1.2).

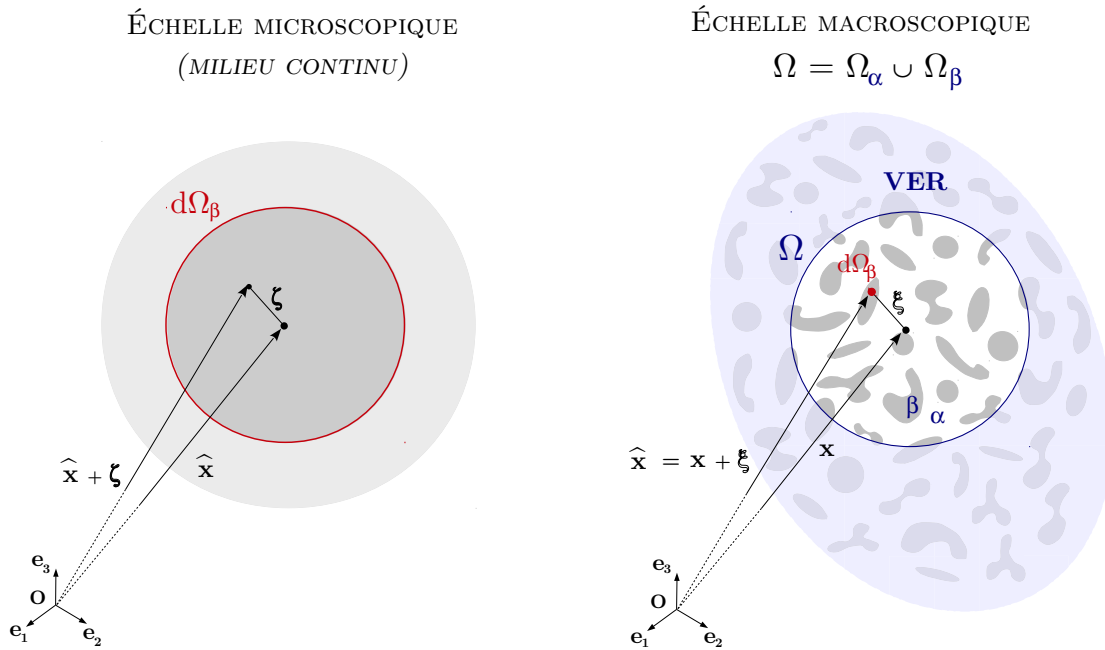


FIGURE 1.2 – Volumes de contrôle et systèmes de coordonnées

Fonction de distribution

Un volume matériel, hétérogène et désigné par Ω est constitué de deux phases distinctes et non-miscibles Ω_α et Ω_β , tel que $\Omega = \Omega_\alpha \cup \Omega_\beta$. Les mouvements liés à Ω sont décrits dans un repère noté $R = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et la position d'un point matériel M constitutif de Ω est repéré par le vecteur $\mathbf{OM} = \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$. On désigne par γ_α la fonction *indicatrice de la phase α* telle que :

$$\gamma_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_\alpha \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_\alpha \end{cases}$$

et inversement pour γ_β la fonction *indicatrice de la phase β* , de sorte que pour le biphasé, la relation suivante soit vérifiée en tout point du milieu hétérogène Ω :

$$\gamma_\alpha(\mathbf{x}) + \gamma_\beta(\mathbf{x}) = 1 \quad (1.2)$$

Les fonctions indicatrices γ_α et γ_β sont construites à partir de la *fonction de Heaviside* H indiquant la localisation la répartition des phases dans Ω . Tout point P appartenant à une interface, désignée k , entre les phases α et β est localisé par le vecteur position $\mathbf{OP} = \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k = x_{\alpha\beta_i}^k \mathbf{e}_i$. La fonction de Heaviside associée arbitrairement à la phase α est définie par :

$$H(x_i - x_{\alpha\beta_i}^k) = \begin{cases} 0, & x_i < x_{\alpha\beta_i}^k \\ 1, & x_i \geq x_{\alpha\beta_i}^k \end{cases}$$

Sa dérivée spatiale s'écrit à l'aide de la *fonction de Dirac* δ de la manière suivante :

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x_i - x_{\alpha\beta_i}^k) = \delta(x_i - x_{\alpha\beta_i}^k)$$

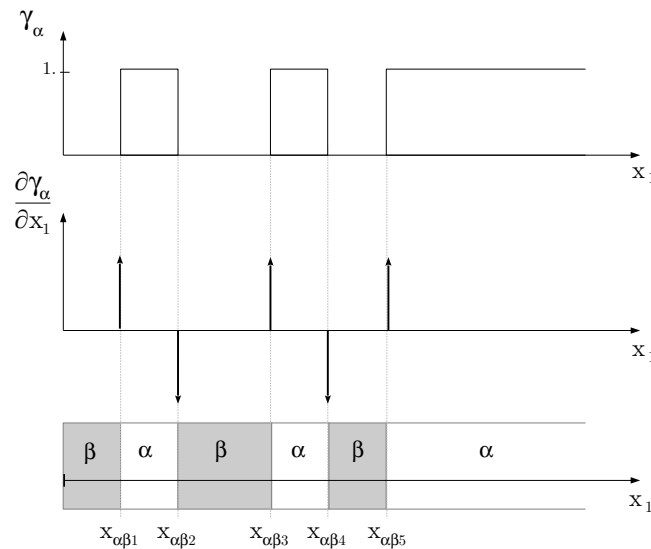


FIGURE 1.3 – Distribution de la fonction γ_α indicatrice de la phase α et de sa dérivée spatiale

La fonction de distribution γ_α doit pouvoir indiquer si l'on est en présence de la phase α en n'importe quel point constitutif du domaine hétérogène Ω . Elle se construit donc comme une somme sur k des fonctions de Heaviside associées à une k -ième interface $\alpha - \beta$. Considérons une distribution des phases α et β en configuration unidimensionnelle selon l'axe (O, \mathbf{e}_1) telle qu'elle est représentée à la Figure 1.3. La fonction de distribution γ_α s'écrit :

$$\gamma_\alpha(x_1) = H(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^1) - H(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^2) + H(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^3) - H(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^4) + H(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^5).$$

On en déduit sa fonction dérivée :

$$\frac{\partial \gamma_\alpha(x_1)}{\partial x_1} = \delta(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^1) - \delta(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^2) + \delta(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^3) - \delta(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^4) + \delta(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^5).$$

Soit, en utilisant la convention d'Einstein :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\alpha(x_1) = -\mathbf{n}_\alpha^k \cdot \mathbf{e}_1 H(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^k) \\ \frac{\partial \gamma_\alpha(x_1)}{\partial x_1} = -\mathbf{n}_\alpha^k \cdot \mathbf{e}_1 \delta(x_1 - x_{\alpha\beta_1}^k) \end{array} \right.$$

\mathbf{n}_α^k étant le vecteur normal unitaire de la k -ième interface $\alpha - \beta$ et sortant de la phase α . Pour une distribution tridimensionnelle on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_1} = -\mathbf{n}_\alpha^k \cdot \mathbf{e}_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k) \\ \frac{\partial \gamma_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_2} = -\mathbf{n}_\alpha^k \cdot \mathbf{e}_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k) \\ \frac{\partial \gamma_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_3} = -\mathbf{n}_\alpha^k \cdot \mathbf{e}_3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

En introduisant l'opérateur de gradient vectoriel suivant :

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3,$$

la dérivée spatiale de la fonction γ_α sous forme vectorielle s'écrit :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \gamma_\alpha(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}_\alpha^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k). \quad (1.4)$$

Par extension à la fonction indicatrice de la phase β , on en déduit

$$\nabla_{\mathbf{x}} \gamma_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_\alpha^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k). \quad (1.5)$$

Définition de la moyenne volumique

On considère une grandeur scalaire, désignée par φ et définie à l'échelle microscopique, dont la *moyenne volumique* φ_α est définie par :

$$\langle \varphi \gamma_\alpha \rangle (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \quad (1.6)$$

La moyenne superficielle peut donc s'écrire:

$$\langle \varphi \gamma_\alpha \rangle (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{\Omega_\alpha(\mathbf{x}, t)} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \quad (1.7)$$

La moyenne superficielle est reliée à la *moyenne volumique intrinsèque* notée $\langle \varphi \gamma_\alpha \rangle^\alpha$:

$$\langle \varphi \gamma_\alpha \rangle (\mathbf{x}, t) = \phi_\alpha(\mathbf{x}, t) \langle \varphi \gamma_\alpha \rangle^\alpha (\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

$\phi_\alpha(\mathbf{x}, t)$ est la *porosité volumique locale* du milieu et se définit par :

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \quad (1.9)$$

Soit sous forme réduite :

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{V_\alpha(\mathbf{x}, t)}{V}$$

Conformément à la propriété vérifiée par le VER, $V = |\Omega|$ est **invariable en espace et en temps**. Néanmoins, les proportions de volume $V_\alpha = |\Omega_\alpha|$ et $V_\beta = |\Omega_\beta|$ peuvent varier en espace et en temps : en espace dès lors que la disposition des hétérogénéités est aléatoire, et en temps, s'il existe des mouvements relatifs entre les phases. Pour alléger l'écriture des équations, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ la fonction φ_α associée à φ se définit:

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

Définition de la moyenne surfacique

Le domaine matériel Ω de frontière Σ est constitué d'un mélange de phases α et β tel que $\Omega = \Omega_\alpha \cup \Omega_\beta$ et $\Sigma = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta$. La *moyenne surfacique* d'une grandeur scalaire désignée par φ se définit:

$$\overline{\varphi \gamma_\alpha}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{S} \int_{\Sigma} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) ds \quad (1.11)$$

On distingue le système de variables (x_1, x_2, x_3, t) qui repère la position du centre du volume Ω du système de variables (ξ_1, ξ_2, ξ_3, t) , repérant la position d'une particule microscopique relativement au centre du volume auquel elle appartient.

En tenant compte de la définition de la fonction de distribution γ_α , la moyenne surfacique peut s'écrire également :

$$\overline{\varphi \gamma_\alpha}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{S} \int_{\Sigma_\alpha(\mathbf{x}, t)} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) ds \quad (1.12)$$

Cette moyenne est reliée à la *moyenne de surface intrinsèque* à la phase α notée $\overline{\varphi \gamma_\alpha}^\alpha$:

$$\overline{\varphi \gamma_\alpha}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_\alpha(\mathbf{x}, t) \overline{\varphi \gamma_\alpha}^\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (1.13)$$

$\varepsilon_\alpha(\mathbf{x}, t)$ est la *porosité surfacique* du milieu et se définit par :

$$\varepsilon_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{S} \int_{\Sigma} \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) ds \quad (1.14)$$

Soit sous forme réduite :

$$\varepsilon_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{S_\alpha(\mathbf{x}, t)}{S}$$

Conformément à la propriété vérifiée par le VER, $V = |\Omega|$ et $S = |\Sigma|$ sont **invariables en espace et en temps**. Néanmoins, les proportions de frontière $S_\alpha = |\Sigma_\alpha|$ et $S_\beta = |\Sigma_\beta|$ peuvent varier en espace et en temps : en espace dès lors que la disposition des hétérogénéités est aléatoire, et en temps, s'il existe des mouvements relatifs entre les phases.

Théorèmes de la moyenne volumique

La prise de moyenne des équations gouvernant les phénomènes microscopiques nécessite l'application de théorèmes de permutation entre les opérateurs intégrale volumique et ceux de dérivation partielle afin d'obtenir la formulation du problème macroscopique équivalent. Des démonstrations de ces règles sont proposées par Slattery [66], Whitaker [75, 76] ainsi que Gray et Lee [22]. Pour se rendre compte des hypothèses constitutives de cette théorie, et le lecteur peut se référer à l'Annexe A qui reprend la démonstration issue de l'article *On the theorems for local volume averaging of multiphase systems (1977)* de Gray et Lee [22].

THÉORÈME I: PERMUTATION ENTRE INTÉGRALE VOLUMIQUE - DÉRIVÉE SPATIALE

$$\langle \nabla \varphi_\alpha \rangle = \nabla \langle \varphi_\alpha \rangle + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \mathbf{n}_\alpha \varphi ds \quad (1.15)$$

THÉORÈME II : PERMUTATION ENTRE INTÉGRALE VOLUMIQUE - DÉRIVÉE TEMPORELLE

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \varphi_\alpha \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \varphi (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \quad (1.16)$$

THÉORÈME III : La prise de moyenne des équations de conservation écrites sous forme globale du milieu continu nécessite l'application du théorème de la divergence adapté à une double intégration volumique. Une démonstration de cette règle est proposée par Eringer et Suhubi (1963, [18]), puis par Hassanizadeh et Gray (1979, [24]).

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|d\Omega|} \left[\int_{d\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dv \right] dv = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[\frac{1}{|d\Omega|} \int_{d\Omega} \boldsymbol{\varphi} \, dv \right] dv = \int_{\Sigma} \frac{1}{|d\Omega|} \left[\int_{d\Sigma} \boldsymbol{\varphi} ds \right] ds \quad (1.17)$$

Équation de bilan à l'échelle microscopique

Ce paragraphe reprend les développements issus de la modélisation d'un milieu continu, permettant d'établir les équations de bilan sous forme locale.

HYPOTHÈSE DU MILIEU CONTINU Le bilan au cours du temps d'une grandeur additive G est réalisé dans un volume $d\Omega_{\alpha}$ de frontière $d\Sigma_{\alpha}$. Le volume $d\Omega_{\alpha}$ est strictement inclus dans le système matériel S_{α} , et de taille suffisamment grande devant les distances inter-moléculaires pour vérifier l'*approximation du milieu continu*. Le volume de contrôle $d\Omega_{\alpha}$ est considéré *fixe et non-matériel* : cela signifie que la matière peut traverser la frontière $d\Sigma_{\alpha}$ au cours du temps.

BILAN DANS UN VOLUME DE CONTRÔLE D'un point de vu phénoménologique, on recense trois types de mécanismes pouvant être responsables de la variation de G au cours du temps. Premièrement, si $d\Omega_{\alpha}$ est animé d'un mouvement propre par rapport au milieu matériel S_{α} , il y a des entrées et des sorties de matière transportant G à travers la frontière $d\Sigma_{\alpha}$. Ce phénomène représente les échanges de la quantité G par **convection**. Par ailleurs, il peut également y avoir des entrées et sorties de G sans que $d\Omega_{\alpha}$ ne soit animé d'un mouvement propre par rapport au milieu matériel S_{α} . Ce phénomène représente les échanges de la quantité G par **diffusion**. Enfin, il peut y avoir au sein de Ω_{α} des mécanismes qui "retiennent" ou "fournissent" de la quantité G : on les désigne respectivement par des **puits** ou des **sources** de G .

L'écriture du bilan d'une quantité $G(t)$ dépend ainsi de la nature du volume de contrôle considéré. En effet, des échanges par convection à travers la frontière $\partial\Sigma_{\alpha}$ existent seulement si celle-ci est "ouverte", et donc, si le volume de contrôle est *non-matériel*². L'annexe B, reprend les différentes écritures de bilan possible suivant le type de volume considéré.

ÉVOLUTION TEMPORELLE Le bilan de G au cours du temps dans un volume de contrôle non-matériel s'écrit :

$$\frac{dG}{dt} + \Phi_c = -\Phi_d + G^* \quad (1.18)$$

Dans la suite des développements, la grandeur G est considérée scalaire. Elle est associée à sa

2. Un volume de contrôle dit non-matériel ne conserve pas les mêmes éléments matériels au cours du temps.

fonction *densité massique* g et sa fonction *masse volumique* ρ par la relation suivante :

$$G(\widehat{\mathbf{x}}, t) = \int_{d\Omega_\alpha} \rho(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv$$

La nature *non-matérielle* de $d\Omega_\alpha$ garantit l'existence d'un flux convectif Φ_c à travers la frontière Σ_α tel que :

$$\Phi_c(\widehat{\mathbf{x}} + t) = \int_{d\Sigma_\alpha} \rho(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) (\mathbf{v}_r(\widehat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n}) ds$$

où $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ est la *vitesse relative* de la matière contenue dans $d\Omega_\alpha$ par rapport à celle de la frontière $d\Sigma_\alpha$, et \mathbf{n} la normale orientée vers l'extérieur de $d\Sigma_\alpha$. Le volume $d\Omega_\alpha$ étant fixe au cours du temps, on a $\mathbf{w} = 0$, soit $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}$.

Le flux diffusif Φ_d de G à travers $d\Sigma_\alpha$ s'écrit en fonction de sa *densité surfacique de flux diffusif* $\boldsymbol{\varphi}_d$ tel que :

$$\Phi_d(\widehat{\mathbf{x}} + t) = \int_{d\Sigma_\alpha} \boldsymbol{\varphi}_d(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \cdot \mathbf{n} ds$$

Les sources et/ou puits de quantité G au cours du temps s'expriment en fonction d'une densité volumique g^* :

$$G^*(\widehat{\mathbf{x}}, t) = \int_{d\Omega_\alpha} g^*(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv$$

En tenant compte des définitions ci-dessus - et en omettant la variable $(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t)$ - l'équation de bilan de G au cours du temps s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{d\Omega_\alpha} \rho g dv + \int_{d\Sigma_\alpha} \rho g (\mathbf{V}(\widehat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n}) ds = - \int_{d\Sigma_\alpha} \boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n} ds + \int_{d\Omega_\alpha} g^* dv \quad (1.19)$$

Le volume de contrôle $d\Omega_\alpha$ est fixe par rapport au référentiel d'étude. De ce fait, l'opérateur de dérivation total par rapport au temps $\frac{d}{dt}$ permute avec l'opérateur d'intégrale volumique et est équivalent à une dérivation partielle :

$$\frac{d}{dt} \int_{d\Omega_\alpha} \rho(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv = \int_{d\Omega_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t)] dv \quad (1.20)$$

Par ailleurs, les grandeurs g , ρ , \mathbf{v} et $\boldsymbol{\varphi}_d$ sont supposées suffisamment régulières sur $d\Sigma_\alpha$ pour appliquer le *théorème de la divergence* aux flux convectif et diffusif. D'où :

$$\Phi_c(\widehat{\mathbf{x}} + t) = \int_{d\Sigma_\alpha} \rho(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) (\mathbf{v}(\widehat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{d\Omega_\alpha} \nabla \cdot (\rho(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{x}}, t)) dv \quad (1.21)$$

et

$$\Phi_d(\widehat{\mathbf{x}}+t) = \int_{d\Sigma_\alpha} \boldsymbol{\varphi}_d(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{d\Omega_\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t) \, dv \quad (1.22)$$

ÉQUATION DE BILAN GLOBALE : elle est obtenue en combinant eq. (1.19) à eq. (1.22)

$$\begin{aligned} \int_{d\Omega_\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t) g(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t)) \, dv &+ \int_{d\Omega_\alpha} \nabla \cdot (\rho(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t) g(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t) \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{x}},t)) \, dv \\ &= - \int_{d\Omega_\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t) \, dv + \int_{d\Omega_\alpha} g^*(\widehat{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\varsigma},t) \, dv \end{aligned} \quad (1.23)$$

ÉQUATION DE BILAN LOCALE : L'hypothèse de continuité des variables mises en jeu permet d'appliquer le *lemme fondamental* sur eq. (1.23) et d'obtenir l'**équation de bilan générale sous forme locale** du milieu continu S_α :

$$\frac{\partial \rho g}{\partial t}(\widehat{\mathbf{x}},t) + \nabla \cdot (\rho(\widehat{\mathbf{x}},t) g(\widehat{\mathbf{x}},t) \mathbf{v}(\widehat{\mathbf{x}},t)) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d(\widehat{\mathbf{x}},t) + g^*(\widehat{\mathbf{x}},t) \quad (1.24)$$

Prise de moyenne locale

La **prise de moyenne locale** consiste à appliquer l'opérateur de moyenne volumique aux *équations de bilan sous forme locale*, vérifiées par une fonction *densité volumique* g et décrivant la dynamique du système continu S_α à l'échelle de $d\Omega$ (Slattery [66], Whitaker [75, 76]). L'application des théorèmes de permutation permettent alors d'obtenir des équations de bilan sous *forme locale* vérifiées par la moyenne $\langle g_\alpha \rangle$ de g et décrivant la dynamique du système hétérogène S à l'échelle de Ω .

Tout d'abord, l'équation locale 1.24, définie sur le domaine continu $S_\alpha \subset S$, est moyennée sur le sous-domaine discontinu $\Omega \subset S$, vérifiant $\Omega = \Omega_\alpha \cup \Omega_\beta$. Les *Théorème I* et *Théorème II* sont ensuite appliqués aux différents termes de l'équation afin d'en déduire une équation sous forme locale vérifiée par les grandeurs moyennes sur Ω . La variable locale $\widehat{\mathbf{x}}$ peut également s'écrire sous la forme $\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$, où \mathbf{x} localise le centre du volume d'intégration Ω et $\boldsymbol{\xi}$ le centre du volume d'intégration microscopique $d\Omega$. On obtient alors:

TAUX DE VARIATION

$$\left\langle \frac{\partial \rho g}{\partial t}(\widehat{\mathbf{x}},t) \gamma_\alpha(\widehat{\mathbf{x}},t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho g \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x},t) - \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \rho(\widehat{\mathbf{x}},t) g(\widehat{\mathbf{x}},t) (\mathbf{V}(\widehat{\mathbf{x}},t) \cdot \mathbf{n}_\alpha) \, ds$$

FLUX CONVECTIF

$$\left\langle [\nabla \cdot (\rho g \mathbf{v})](\widehat{\mathbf{x}},t) \gamma_\alpha(\widehat{\mathbf{x}},t) \right\rangle = \nabla \cdot \langle \rho g \mathbf{v} \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x},t) + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \rho(\widehat{\mathbf{x}},t) g(\widehat{\mathbf{x}},t) (\mathbf{V}(\widehat{\mathbf{x}},t) \cdot \mathbf{n}_\alpha) \, ds$$

FLUX DIFFUSIF

$$\langle [\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d(\hat{\mathbf{x}}, t)] \gamma_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t) \rangle = \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d(\hat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds$$

SOURCES

$$\langle g^*(\hat{\mathbf{x}}, t) \gamma_\alpha(\hat{\mathbf{x}}, t) \rangle = \langle g^* \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t)$$

ÉQUATION DE BILAN MOYENNÉE La combinaison des termes ci-dessous entraîne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho g \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \langle \rho g \mathbf{v} \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \langle \boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t) + \langle g^* \gamma_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d(\hat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds$$

Pour alléger l'écriture de l'équation de bilan moyennée, les variables macroscopique (\mathbf{x}, t) et microscopique $(\hat{\mathbf{x}}, t)$ sont omises. En tenant compte de la définition eq. (1.8) d'une moyenne volumique intrinsèque et de la définition eq. (1.10) d'une fonction intrinsèque, on déduit finalement de l'équation précédente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_\alpha \langle \rho_\alpha g_\alpha \rangle^\alpha) + \nabla \cdot (\phi_\alpha \langle \rho_\alpha g_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha) = -\nabla \cdot (\phi_\alpha \langle \boldsymbol{\varphi}_{d\alpha} \rangle^\alpha) + (\phi_\alpha \langle g_\alpha^* \rangle^\alpha) - \mathbf{I}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n}_\alpha ds \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Prise de moyenne globale

Hassanizadeh et Gray [24, 25] interrogent la pertinence d'une prise de moyenne «unique» vis-à-vis de la restitution fidèle de l'origine surfacique de certaines quantités macroscopiques:

"In all averaging theories developed to date, [...] volume average operators have typically been used to obtain the average mass density as well as the average stress tensor. The fact that these quantities are of very different natures, one being specified per unit volume and the other per unit area, is disregarded."

M. Hassanizadeh et W.G. Gray,

General conservation equations for multi-phase systems (I), 1979 [24]

Les équations dites *locales* de la mécanique des milieux continus permettent de décrire un problème microscopique à partir de grandeurs toutes considérées de nature volumique: l'application successive du *théorème de la divergence* et du *lemme fondamental* aux équations de bilan intégrale ne permet plus de distinguer les quantités définies, à l'origine, par unité de surface de celles définies par unité de volume. De ce fait, une moyenne volumique appliquer aux équations

microscopiques *locales* ne peut pas de rendre compte de l'éventuelle origine surfacique de certaines grandeurs macroscopiques (comme le vecteur et/ou tenseur des contraintes par exemple). Hassanizadeh et Gray [24, 25] proposent, en 1979, de réaliser une intégration "préalable" des équations microscopiques locales avant d'y appliquer l'opérateur de moyenne volumique. Par la suite, ils suggèrent d'opter pour une prise de moyenne des équations microscopiques écrites sous forme *globale*, ou *intégrale* [21]:

" The disadvantage of the averaging approach is that the starting point is the microscale differential equations instead of the global integral equations that are more fundamental relations."

W.G. Gray et M. Hassanizadeh,

Macroscale continuum mechanics for multiphase porous-media flow, 1998 [21]

Dans le cadre de cette thèse, on se propose d'étudier les suggestions de ces auteurs en développant une méthode de changement d'échelle par **prise de moyenne globale**; le principe étant décrit ci-après.

PRINCIPES La prise de moyenne globale proposée consiste à appliquer l'opérateur de moyenne volumique aux équations de bilan écrites sous *forme intégrale*, vérifiées par une fonction *densité volumique* g et décrivant la dynamique du système continu S_α à l'échelle de $d\Omega$. L'application des théorèmes de permutation et "l'expansion" du volume de contrôle $d\Omega$ vers le volume de contrôle Ω permettent alors d'obtenir des *équations de bilan intégrales* vérifiées par la *moyenne* $\langle g_\alpha \rangle$ de g et décrivant la dynamique du système hétérogène S à l'échelle de Ω .

Tout d'abord l'équation intégrale 1.23, définie continûment sur le domaine S , est moyennée sur le sous-domaine discontinu $\Omega \subset S$. Le problème se présente alors sous la forme d'une double intégrale : l'une sur $d\Omega$ et l'autre sur Ω . On fait tendre le domaine d'intégration $d\Omega$ associé à l'échelle microscopique vers le domaine Ω représentant l'échelle macroscopique. La variable $\hat{\mathbf{x}}$ localisant le centre du volume $d\Omega$ tend alors vers la variable \mathbf{x} localisant le centre du volume Ω , soit $\hat{\boldsymbol{\xi}} \rightarrow \vec{0}$. Les *Théorème I*, *Théorème II* et *Théorème III* sont ensuite appliqués aux différents termes de l'équation afin d'en déduire une équation sous forme globale - ou intégrale - vérifiée par les grandeurs moyennes sur Ω . Il vient alors la dérivation des termes ci-après.

TAUX DE VARIATION

$$\left\langle \int_{d\Omega} \frac{\partial \rho g}{\partial t}(\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \gamma_\alpha(\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv \right\rangle_{d\Omega \rightarrow \Omega} = \frac{1}{V} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\partial \rho g}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv dv$$

Pour alléger l'écriture des équations, la variable $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t)$ est omise. Le *Théorème II* entraîne :

$$\frac{1}{V} \int_\Omega \int_\Omega \frac{\partial \rho g}{\partial t} \gamma_\alpha dv dv = \frac{1}{V} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_\Omega \rho g \gamma_\alpha dv \right] dv - \frac{1}{V} \int_\Omega \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \rho g (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds dv$$

Le volume $V = |\Omega|$ est invariable suivant les variables spatiale et temporelle : la fraction $\frac{1}{V}$ peut donc permuter avec l'intégrale sur Ω et la dérivée partielle en temps. En tenant compte de la définition de l'opérateur de moyenne volumique $\langle \cdot \rangle$, on en déduit :

$$\left\langle \int_{d\Omega} \frac{\partial \rho g}{\partial t} \gamma_\alpha dv \right\rangle \stackrel{d\Omega \rightarrow \Omega}{=} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho g \gamma_\alpha \rangle - \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \rho g (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \right] dv \quad (1.26)$$

FLUX CONVECTIF

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_{d\Omega} \nabla \cdot (\rho(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \mathbf{V}(\widehat{\mathbf{x}}, t)) \gamma_\alpha(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv \right\rangle \\ & \stackrel{d\Omega \rightarrow \Omega}{=} \frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) g(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv dv \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture des équations, les variables $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t)$ et (\mathbf{x}, t) sont omises. Le *Théorème I* entraîne :

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho g \mathbf{V}) \gamma_\alpha dv dv = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho g \mathbf{V} \gamma_\alpha) dv + \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \rho g (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \right] dv$$

Soit,

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho g \mathbf{V}) \gamma_\alpha dv dv = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho g \mathbf{V} \gamma_\alpha) dv dv + \frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \rho g (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds dv$$

Le volume $V = |\Omega|$ est invariable suivant les variables spatiale et temporelle : la fraction $\frac{1}{V}$ peut donc permuter avec l'intégrale sur Ω . L'application du *Théorème III* au premier terme du second membre entraîne :

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho g \mathbf{V} \gamma_\alpha) dv dv = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho g \mathbf{V} \gamma_\alpha) dv \right] dv = \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \rho g \gamma_\alpha (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds \right] ds$$

Le champ de vitesse $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ ne dépend pas de $\boldsymbol{\varsigma}$ et peut permuter avec l'intégrale sur Σ . En tenant compte de la définition de la moyenne surfacique $\overline{\cdot}$ et du théorème de la divergence appliqué à l'intégrale sur la frontière Σ , on en déduit :

$$\int_{\Sigma} \left[\frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \rho g \gamma_\alpha (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds \right] ds = \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \rho g \gamma_\alpha ds \right] (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\overline{\rho g \gamma_\alpha} \mathbf{V}) dv$$

Finalement la prise de moyenne du flux convectif entraîne :

$$\left\langle \int_{d\Omega} \nabla \cdot (\rho g \mathbf{V}) \gamma_\alpha dv \right\rangle_{d\Omega \rightarrow \Omega} \stackrel{=}{=} \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot (\overline{\rho g \gamma_\alpha} \mathbf{V}) + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \rho g (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \right] dv \quad (1.27)$$

FLUX DIFFUSIF

$$\left\langle \int_{d\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \gamma_\alpha(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv \right\rangle_{d\Omega \rightarrow \Omega} \stackrel{=}{=} \frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv dv$$

Pour alléger l'écriture des équations, la variable $(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t)$ est omise. Le *Théorème I* entraîne :

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d) \gamma_\alpha dv dv = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha) dv + \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \right] dv$$

Soit,

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d) \gamma_\alpha dv dv = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha) dv dv + \frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds dv$$

Le volume $V = |\Omega|$ est invariable suivant les variables spatiale et temporelle : la fraction $\frac{1}{V}$ peut donc permuter avec l'intégrale sur Ω . L'application du *Théorème III* au premier terme du second membre entraîne :

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha) dv dv = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha) dv \right] dv = \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha \cdot \mathbf{n}) ds \right] ds$$

En tenant compte de la définition de la moyenne surfacique $\overline{\cdot}$ et du théorème de la divergence appliqué à l'intégrale sur la frontière Σ , on en déduit :

$$\int_{\Sigma} \left[\frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha \cdot \mathbf{n}) ds \right] ds = \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha ds \right] \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha} dv$$

Finalement la prise de moyenne du flux diffusif entraîne :

$$\left\langle \int_{d\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d) \gamma_\alpha dv \right\rangle_{d\Omega \rightarrow \Omega} \stackrel{=}{=} \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha} + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \right] dv \quad (1.28)$$

SOURCES

$$\left\langle \int_{d\Omega} g^*(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \gamma_\alpha(\widehat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv \right\rangle_{d\Omega \rightarrow \Omega} \stackrel{=}{=} \frac{1}{V} \int_{\Omega} \int_{\Omega} g^*(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, t) dv dv$$

Le volume $V = |\Omega|$ est invariable suivant les variables spatiale et temporelle : la fraction $\frac{1}{V}$ peut donc permuter avec l'intégrale sur Ω et la dérivée partielle en temps. En tenant de la définition de l'opérateur de moyenne volumique $\langle \cdot \rangle$, on en déduit :

$$\left\langle \int_{d\Omega} g^* \gamma_\alpha dv \right\rangle_{d\Omega \rightarrow \Omega} \stackrel{=}{=} \int_{\Omega} \langle g^* \gamma_\alpha \rangle dv \quad (1.29)$$

ÉQUATION DE BILAN MOYENNÉE La sommation des relations (1.26), (1.27), (1.28) et (1.29) permet d'écrire une équation de bilan sous la *forme globale* suivante :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho g \gamma_\alpha \rangle + \nabla \cdot (\overline{\rho g \gamma_\alpha} \mathbf{V}) + \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha} + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds - \langle g^* \gamma_\alpha \rangle \right] dv = 0 \quad (1.30)$$

Les opérateurs de moyenne volumique et surfacique sur Ω , ainsi que l'intégrale sur $\Gamma_{\alpha\beta}$, sont indépendantes de la variable $\boldsymbol{\varsigma}$ et peuvent permuter avec l'intégrale volumique sur Ω . On en déduit alors une équation de bilan sous la *forme locale* suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho g \gamma_\alpha \rangle + \nabla \cdot (\overline{\rho g \gamma_\alpha} \mathbf{V}) = -\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\varphi}_d \gamma_\alpha} + \langle g^* \gamma_\alpha \rangle - \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \quad (1.31)$$

En tenant compte de la définition (1.8) d'une moyenne volumique intrinsèque et de la définition (1.10) d'une fonction intrinsèque, on en déduit finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_\alpha \langle \rho_\alpha g_\alpha \rangle^\alpha) + \nabla \cdot (\varepsilon_\alpha \overline{\rho_\alpha g_\alpha}^\alpha \mathbf{V}) = -\nabla \cdot (\varepsilon_\alpha \overline{\boldsymbol{\varphi}_{d\alpha}}^\alpha) + \phi_\alpha \langle g_\alpha^* \rangle^\alpha - \mathbf{I}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{I}_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} (\boldsymbol{\varphi}_d \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Similitudes entre moyennes Locale et Globale

Les termes obtenus par *prise de moyenne locale* et *prise de moyenne globale* d'une équation de bilan générale sont dérivées dans la section 1.2.2 et récapitulés dans la Table 1.1. Les taux de variation, sources et d'échanges interfaciaux macroscopiques présentent la même écriture pour les deux méthodes de prise de moyenne. Cependant, des divergences entre les approches apparaissent dans l'écriture des termes de flux convectif et diffusif : ces termes dépendent d'une moyenne de type **volumique pour la prise de moyenne des équations locales** et d'une moyenne de type **surfacique pour la prise de moyenne des équations globales**.

	Taux de variation	Flux convectif	Flux diffusif	Sources	Échanges
LOCALE	$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_\alpha \langle \rho_\alpha g_\alpha \rangle^\alpha)$	$\nabla \cdot (\phi_\alpha \langle \rho_\alpha g_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha)$	$-\nabla \cdot (\phi_\alpha \langle \boldsymbol{\varphi}_{d\alpha} \rangle^\alpha)$	$\phi_\alpha \langle g_\alpha^* \rangle^\alpha$	$\mathbf{I}_{\alpha\beta}$
GLOBALE	$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_\alpha \langle \rho_\alpha g_\alpha \rangle^\alpha)$	$\nabla \cdot (\varepsilon_\alpha \overline{\rho_\alpha g_\alpha}^\alpha \mathbf{V})$	$-\nabla \cdot (\varepsilon_\alpha \overline{\boldsymbol{\varphi}_{d\alpha}}^\alpha)$	$\phi_\alpha \langle g_\alpha^* \rangle^\alpha$	$\mathbf{I}_{\alpha\beta}$

TABLE 1.1 – *Écriture des termes obtenus à l'issu des prises de moyenne locale et globale*

La Table 1.1 montre que la prise de moyenne des équations microscopiques sous forme intégrale permet de caractériser les flux macroscopiques par convection et diffusion comme des phénomènes surfaciques, conformément aux arguments avancés par Hassanizadeh et Gray.

1.2.3 Influences des échelles

Milieux aléatoires ou désordonnés

Le choix du VER se conforme en général au critère de **séparation des échelles** afin de traiter le problème hétérogène dans des conditions similaires à celles de la modélisation des milieux continus. Ce critère porte sur la dimension caractéristique d du VER devant être suffisamment petite par rapport à la taille L du système, pour garantir la continuité des quantités macroscopiques, mais suffisamment grande par rapport à la taille l des hétérogénéités pour que les fluctuations moyennes soient gouvernées par des phénomènes macroscopiques, indépendamment du nombre d'éléments microscopiques contenus dans le VER. Il existe un volume V^* occupé par le VER, à partir duquel les phénomènes microscopiques impactent de façon négligeable les fluctuations d'une quantité macroscopique $\langle \varphi \rangle$ associée (par exemple, voir Figure 1.4 pour la densité de masse). Le critère de séparation des échelles³ se résume donc à :

$$l \ll d \ll L \quad (1.33)$$

Il faut néanmoins préciser que cette propriété ne conditionne pas la validité mathématique des théorèmes de permutation impliqués dans le processus de changement d'échelle par prise de moyenne conformément aux démonstrations reprises dans l'Annexe A. En effet, seule la continuité des fonctions à intégrer est requise pour permuter les opérateurs mis en jeu, et cette dernière est bien garantie par les fonctions de distributions.

3. Ce critère est analogue à l'hypothèse du milieu continu qui requiert un volume de contrôle suffisamment grand par rapport aux dimensions inter-moléculaires afin de garantir la régularité de la fonction masse volumique.

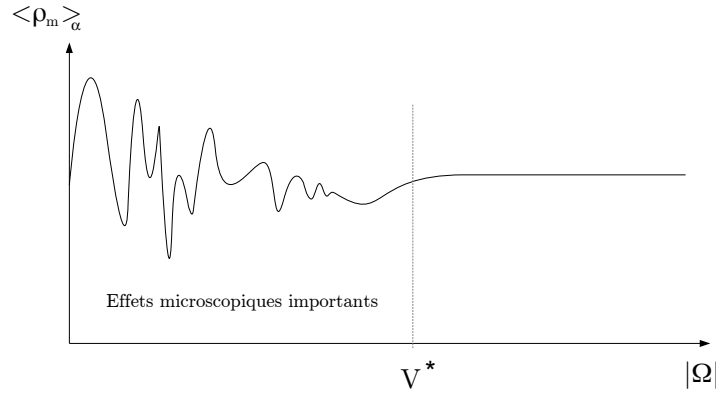


FIGURE 1.4 – Dépendance de la taille du VER sur la fonction densité de masse $\langle \rho_m \rangle_\alpha$

La séparation des échelles a pour seul objet de garantir la dérivabilité⁴ des fonctions intégrales (ou moyennes) en tout point du domaine comme le précise S. Whitaker dans un article introduisant la méthode de prise de moyenne :

” It should be clear that $\langle \phi \rangle$ is a continuous function for any value of V , but for values of V larger than V^* the volume average $\langle \phi \rangle$ become smooth, and thus amenable to the type of analysis we have in mind. [...] This is an important restriction, for it must be true if the average is to be a useful quantity with which to work. ”

S. Whitaker, *Advances in theory of fluid motion in porous media*, 1969 [76]

Le changement d'échelle par prise de moyenne est, pour cet auteur, destinée à l'étude des milieux poreux dont la disposition des hétérogénéités est spatialement aléatoire et/ou désordonnée⁵. Néanmoins, l'application des méthodes d'*homogénéisation asymptotique* aux milieux dits *ordonnés* ou *périodiques*, notamment par Bensoussan (1978, [5]) et Sanchez-Palencia (1980, [63]), amène à considérer la prise de moyenne pour l'étude de ces systèmes.

Milieux périodiques ou ordonnés

Pour les milieux hétérogènes et spatialement périodiques, la condition de continuité des fonctions macroscopiques est moins restrictives que la séparation des échelles ; le critère suivant est alors admissible :

$$l \sim d \ll L \quad (1.34)$$

La Figure 1.5 illustre des choix possibles de VER pour des éléments circulaires disposés périodiquement suivant un pas carré : pour les milieux périodiques, un VER est communément appelé *cellule de base*. Pour de tels VER, la disposition des hétérogénéités impacte peu les fluctuations

4. Une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable, tandis qu'une fonction dérivable est nécessairement continue.

5. Roches sédimentaires, aquifères ou bétons

des quantités macroscopiques, cela se traduisant notamment par une fraction volumique de phase invariable en tout point du milieu.

Néanmoins, Howes et Whitaker (1985, [28]) introduisent une configuration de milieu périodique pour lequel la dérivabilité de la fonction intégrale et la validité du théorème de permutation spatiale ne sont garantis que pour un type particulier de VER:

” *In this case we have violated the condition put forth earlier that $|\Omega_\beta|(\mathbf{x})$ be continuously differentiable, thus the averaging theorem derived in the previous section fails but only over a countable set of points of Lebesgue measure zero* ”

F.A. Howes et S. Whitaker, *The spatial averaging theorem revisited*, 1985 [28]

Cette analyse permet de répondre à Veverka (1981, [73]), questionnant la rigueur mathématique des permutations entre dérivée spatiale et intégrale volumique: Howes et Whitaker affirment que l'existence possible de conditions pour lesquelles la dérivée ne serait pas définie en un nombre fini de points ne remet pas en cause la validité du théorème de permutation spatiale ; d'autant que le type de VER retenu est, en général, en faveur d'une fonction intégrale continûment dérivable dans l'espace.

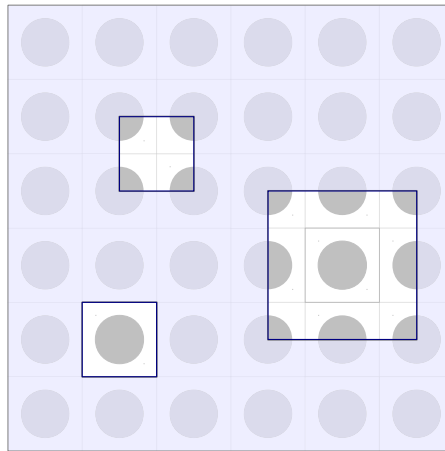


FIGURE 1.5 – *Choix possibles de cellules de base pour un milieu périodique*

Notion de moyenne cellulaire

En 1994, Quintard et Whitaker [55, 56] reviennent sur l'application de la moyenne volumique pour les cas particuliers de milieux poreux périodiques dont l'écoulement est stationnaire, vérifiant l'approximation de Stokes. Pour une telle configuration, la prise de moyenne volumique, basée sur un VER vérifiant la condition $l \sim d$, ne permet pas de retrouver la loi de Darcy⁶ :

6. La loi de Darcy est considérée comme une référence pour la validation de méthodes d'homogénéisation.

” *This result is obviously inconsistent with Darcy’s law, and tells us that the intrinsic phase average pressure defined by Equation (1.4) [the one derived from the volume averaging] is not the correct pressure to be used with ordered or spacially periodic porous media.* ”

M. Quintard et S. Whitaker, *Transport in Ordered and Disordered Porous Media I*, 1994 [55]

Ils montrent que l’application d’un opérateur supplémentaire, dit de *moyenne cellulaire*, permet de retrouver la loi de Darcy attendue pour cette configuration. Cette moyenne dite cellulaire représente en fait une moyenne locale sur un volume d’intégration correspondant à une cellule de base du milieu périodique.

Avec l’intention de développer une méthode "généralisée", ils proposent d’introduire des fonctions poids (ou *weighting functions*) dans le processus de moyenne. Ils étudient cette alternative pour le cas particulier d’un écoulement traversant un milieu périodique, vérifiant l’approximation de Stokes. Cependant, la prise en compte d’une fonction poids dans la procédure de prise de moyenne locale représente une alternative manifestement efficace pour le cadre particulier des études de Quintard et Whitaker [55, 56], et ne fait pas l’objet d’une démonstration permettant d’en généraliser l’utilisation.

1.3 Problème à l’échelle macroscopique

L’homogénéisation de l’écoulement en interaction avec les structures mobiles est l’alternative retenue à la modélisation coûteuse du milieu continu. La méthode de prise de moyenne, introduite à la section précédente, est donc appliquée pour formuler le problème macroscopique d’interaction fluide-structure en faisceaux de tubes.

Les hypothèses de l’étude nécessitent d’adopter une approche *discrète* des phénomènes, puisque la description continue du problème macroscopique, auquel aboutit la prise de moyenne, ne permet pas de définir la position de chaque structure d’un système tubulaire donné. Une alternative consiste à résoudre le problème homogénéisé sur un ensemble de volumes (ou points) *discrets*. Le système tubulaire est divisé en volumes de contrôle réguliers désignés par la suite **cellules de base** ; les taille, forme et position d’une cellule étant conditionnées par le type de phénomènes à décrire et leur niveau d’observation.

1.3.1 Hypothèses

Soit S , un système hétérogène défini comme un arrangement de tubes cylindriques indéformables, pouvant se déplacer au cours du temps et immergés dans un fluide monophasique en interaction dynamique avec les différentes structures du système. Le problème est défini suivant de plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ de la section droite des tubes. Le type de problème traité vérifie l’ensemble des hypothèses introduites ci-après.

Hypothèse H1 : Topologie et découpage du système hétérogène

Le système considéré est constitué de N cylindres identiques entre-eux et disposés, à un instant donné, suivant un pas carré. Les mouvements individuels possibles des éléments solides ne permettent pas de prétendre à une disposition régulière et strictement périodique au cours du temps : ce type de système est ainsi qualifié de *pseudo-périodique*. Le domaine d'étude est divisé en N *cellules de base* : chaque cellule est définie comme un **volume de contrôle fixe et non-matériel** afin de rendre possible des échanges de matière fluide entre les cellules. Les cellules de base du système sont identiques entre elles disposées suivant un pas régulier P .

A tout instant et pour tout entier $1 \leq i \leq N$, une cellule de base Ω_i est constituée d'un seul et même cylindre Ω_{si} , de sorte que la description au cours du temps des déplacements d'une structure donnée est associée à l'observation d'un seul et même volume de contrôle. A tout instant, les fractions volumiques de phase fluide ϕ_f et solide ϕ_s sont constantes au cours du temps et les fractions surfaciques vérifient respectivement $\varepsilon_f = 1$ pour la phase fluide et $\varepsilon_f = 0$ pour la phase solide. La décomposition du domaine en cellules de base est illustrée sur la Figure 1.6.

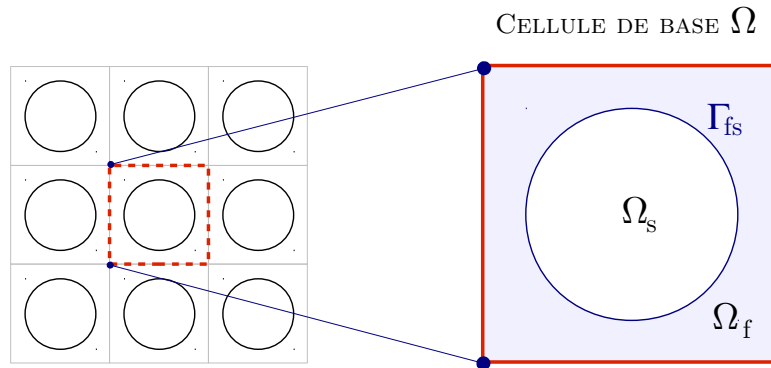


FIGURE 1.6 – Sélection d'une cellule de base dans un faisceau à pas carré de 9 cylindres : Toute cellule de base Ω représente la présence d'un cylindre et de l'écoulement qui l'avoisine dans la limite du pas P du faisceau. Chaque information fournie par la cellule de base est associée à un sous-domaine de cette même cellule. Le déplacement du cylindre est associé au sous-domaine solide Ω_s et les vitesse et pression moyennes de l'écoulement sont associées au sous-domaine fluide Ω_f .

Hypothèse H2 : Propriétés de l'écoulement inter-tubes

Toute la matière fluide du système hétérogène est monophasique. Les écoulements inter-cylindres considérés sont incompressibles et laminaires. Les éventuelles forces volumiques intrinsèques à l'écoulement (telles que les actions de la pesanteur) sont négligées.

Hypothèse H3 : Propriétés mécaniques des structures cylindriques

L'hypothèse *H1* sur l'information fournie par une cellule de base entraîne une restriction sur le cadre dynamique à considérer : pour garantir l'intégrité d'une information sur un cylindre donné Ω_s , les amplitudes de ses **déplacements sont limitées par les frontières de la cellule de base Ω** à laquelle il appartient. Cette restriction permet d'assurer des fractions volumique et surfacique invariables en temps et en espace.

Les structures cylindriques considérées sont de sections droites indéformables. On choisit d'assimiler le comportement dynamique de chaque élément solide à celui d'un *oscillateur harmonique non-amorti dans le vide* : l'absence d'amortissement propre à la structure permet de mettre en évidence les effets dissipatifs causés par l'écoulement interstitiel. Le déplacement \mathbf{u}_s d'un cylindre au cours du temps vérifie l'équation de dynamique suivante :

$$\overline{\overline{M}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2}(t) + \overline{\overline{K}} \mathbf{u}_s(t) = \mathbf{F}(t) ,$$

$\overline{\overline{M}}$ et $\overline{\overline{K}}$ sont respectivement les matrices de masse et de raideur propres de la structure et \mathbf{F} représente les forces extérieures d'origine *hydrodynamique*.

1.3.2 Choix de la méthode de moyenne

Parmi les deux approches possibles, la prise de moyenne locale présente des verrous mis en évidence par Quintard et Whitaker [55, 56] et par Gray et Hassanizadeh [24, 25, 21] (voir section 1.2.3). Par ailleurs, la prise de moyenne intégrale n'est l'objet d'aucune étude approfondie pour juger de sa pertinence vis-à-vis de la prise de moyenne locale.

De ce fait, on se propose de mener une analyse quantitative qui, dans le cadre de cette thèse, apporte des éléments permettant de justifier le choix entre les deux méthodes. Cette analyse est basée sur la solution microscopique d'un d'écoulement stationnaire, traversant un arrangement de cylindres disposés périodiquement, et dont le VER correspond à la cellule de base introduite précédemment (voir Figure 1.6). La dérivation de ce problème à l'échelle macroscopique n'implique que la contribution du flux diffusif - soit du gradient de pression - et celle des échanges interfaciaux - soit des charges hydrodynamiques stationnaires : ce type de problème correspond ainsi à un écoulement de *Darcy*.

Pour différents VER - avec des valeurs variables de ε_f et pour ϕ_f invariable - il apparaît que l'équation issue d'une prise de moyenne locale gouverne le problème équivalent à l'échelle macroscopique seulement si le critère $\phi_f = \varepsilon_f$ est respecté par le VER ; tandis que l'équation issue d'une prise de moyenne globale ne présente pas de condition vis-à-vis du VER pour être vérifié quantitativement. Le détail de l'analyse vient ci-après.

Problème microscopique

Considérons un système hétérogène défini comme un arrangement de tubes cylindriques indéformables, maintenus fixes au cours du temps et disposés périodiquement suivant un pas carré. Un écoulement permanent de vitesse incidente U_∞ traverse ce réseau de tubes suivant la direction (Ox) - horizontale - du repère d'étude. Le problème est défini suivant de plan $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ de la section droite des tubes.

HYPOTHÈSES A l'échelle du **milieu continu**, la loi de comportement du fluide est *newtonienne*⁷ et l'écoulement inter-cylindres est considéré comme incompressible, visqueux et laminaire, avec des sources de masse et de quantité de mouvement négligeables. Les champs de pression et vitesse fluide stationnaires définis à cette échelle sont calculés numériquement dans *Code_Saturne*, par résolution directe des équations de Navier-Stokes (EDF R&D [41], Archambeau et al. [3]). Les méthodes de résolution de ce code *CFD* sont l'objet du *Chapitre 3*, et ne sont pas amenées ici.

CONFIGURATION Le domaine de calcul est constitué de 3 parois cylindriques rigides, et présente 12 fractions de cylindres aux frontières, : en raison de la périodicité spatiale du milieu et de la stationnarité du problème, un petit nombre de structures est suffisant pour restituer la dynamique de l'écoulement au sein d'un faisceau similaire de plus grande taille.

La vitesse fluide est imposée constante et stationnaire en tout point de la frontière gauche du domaine, définie comme une condition numérique d'*entrée fluide*. La frontière droite est définie comme une frontière de *sortie fluide* et vérifie une condition de Dirichlet en pression. Les frontières circulaires représentent les interfaces fluide-solide et sont définies numériquement comme des parois rigides, vérifiant une condition d'adhérence fluide. Les segments de droite en position *haute* et *basse* du domaine sont numériquement périodiques pour prévenir les effets de couches limites sur la solution microscopique.

Les propriétés géométriques et hydrodynamiques du milieu sont regroupées dans la Table 1.2. Enfin, le maillage utilisé présente raffinement suffisant des zones où sont supposées se développer des couches limites: les critères de raffinement seront précisés au *Chapitre 4*.

D (mm)	$v (m^2.s^{-1})$	$\rho_f (kg.m^{-3})$	$P(mm)$	P^*
10,0	$1,0.10^{-6}$	$1,0.10^3$	0,014	1,4

TABLE 1.2 – *Données géométriques et hydrodynamiques du domaine de calcul*

SYSTÈME D'ÉQUATIONS À RÉSOUDRE L'équation locale du bilan de masse définie dans le système continu fluide s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.35)$$

7. La loi de comportement en contrainte du fluide est supposée linéaire au champ de vitesse.

Pour la conservation de la quantité de mouvement, les échanges par diffusion à travers un volume de contrôle $d\Omega_f$ sont définis à partir du *vecteur contrainte* \mathbf{T} , supposé vérifier le principe d'action-réaction, ainsi que le *théorème de Cauchy*. Dans ce cadre, il existe un champ tensoriel du second ordre $\bar{\bar{\sigma}}$ tel que:

$$\bar{\bar{\varphi}}_d(\hat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}, t, \mathbf{n}) = -\bar{\bar{\sigma}}(\hat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (1.36)$$

En considérant les sources de quantité de mouvement négligeables, l'équation locale définie dans le système continu fluide s'écrit donc:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} \quad (1.37)$$

Le fluide considéré est newtonien ; sa loi de comportement en contrainte est donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \mu(\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v} + {}^t\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v}) + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\bar{\bar{I}} \quad (1.38)$$

Dans le cadre des hypothèses d'incompressibilité et de stationnarité vérifiées par l'écoulement, le système d'équations à résoudre numériquement est le suivant:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v} + {}^t\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v})] \end{cases} \quad (1.39)$$

La Figure 1.7 donne un aperçu des champs de pression et vitesse fluide issus de la résolution numérique de ce problème microscopique.

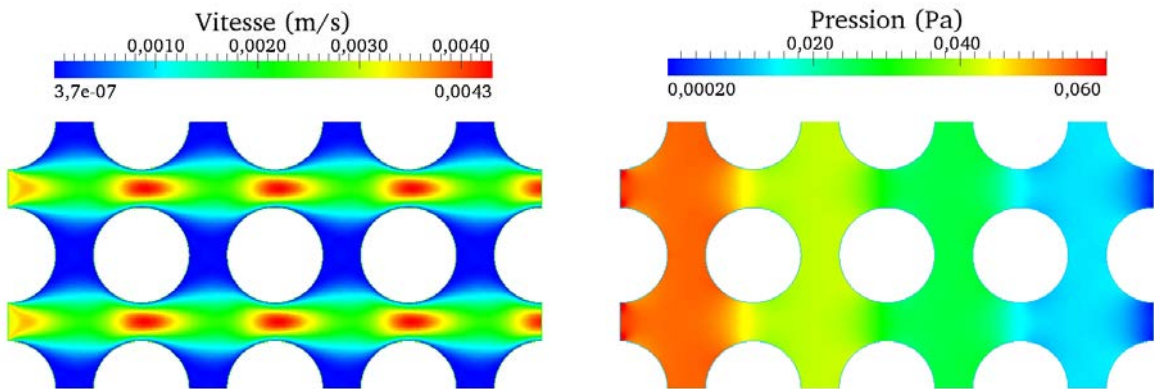


FIGURE 1.7 – Champs de solution microscopique de l'écoulement stationnaire

Problème macroscopique

VITESSE CELLULAIRE Quelque soit la décomposition cellulaire retenue, la moyenne spatiale de la solution du champ de vitesse est stationnaire, unidirectionnelle et invariable dans l'espace. La vitesse cellulaire s'exprime en fonction de la vitesse incidente U_∞ tel que:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \mathbf{e}_x = \frac{P-D}{P} U_\infty \\ \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \mathbf{e}_y = 0 \end{cases} \quad (1.40)$$

PRISE DE MOYENNE LOCALE Dans le cadre des hypothèses d'incompressibilité et stationnarité vérifiées par l'écoulement, le problème macroscopique équivalent au problème microscopique considéré (eq. (1.39)) s'écrit:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\phi_f \langle \rho_f \mathbf{v}_f \rangle^f) = 0 \\ \nabla \cdot (\phi_f \langle \rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f \rangle^f) = -\nabla \cdot (\phi_f \langle p_f \rangle^f) + \nabla \cdot \left(\phi_f \left\langle \mu (\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v} + {}^t \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v})_f \right\rangle^f \right) - \mathbf{I}_{fs} \end{cases}$$

Le champ de vitesse défini à l'échelle microscopique est périodique d'une cellule à l'autre, et celui défini à l'échelle macroscopique est invariable en espace, soit constant d'une cellule à l'autre. Contrairement à une description continue, le taux de variation de la variable \mathbf{x} , localisant le centre d'une cellule de base (ou VER) Ω , ne coïncide pas avec celui de la variable $\boldsymbol{\xi}$ qui localise un volume de contrôle microscopique $d\Omega$. Le taux de variation de la variable \mathbf{x} est en revanche conditionné par la décomposition cellulaire du milieu. Les opérateurs de dérivation spatiale appliqués aux opérateurs de moyenne $(\cdot)^f$, et impliquant la vitesse fluide microscopique, sont donc nuls du fait de la périodicité de la solution de \mathbf{v}_f . Aussi, la périodicité des distributions volumique et surfacique des phases d'une cellule à l'autre donne lieu au problème macroscopique écrit sous la forme suivante:

$$\boxed{\phi_f \nabla \cdot \langle p_f \rangle^f = -\mathbf{I}_{fs}} \quad (1.41)$$

PRISE DE MOYENNE GLOBALE Le raisonnement conduit pour la dérivation du problème macroscopique par prise de moyenne locale est aussi valable pour la prise de moyenne globale, et permet d'en déduire immédiatement :

$$\boxed{\varepsilon_f \nabla \cdot \overline{p_f}^f = -\mathbf{I}_{fs}} \quad (1.42)$$

Analyse quantitative

Les équations (1.41) et (1.42) issues respectivement des prises de moyenne locale et globale présentent des divergences sur la contribution du gradient de pression dans l'équilibre hydrostatique du milieu. A partir de ce problème simple, une analyse quantitative est réalisée afin d'initier une réflexion sur les conditions pour lesquelles ces équations peuvent gouverner ou non un problème macroscopique donné en milieu périodique. Pour ce faire, les termes mis en jeu dans chaque équation sont estimés numériquement à partir de la solution numérique et microscopique de l'écoulement.

CALCUL DES PRESSIONS MOYENNES Les pressions moyennes $\langle p_{\mathbf{f}} \rangle^{\mathbf{f}}$ et $\overline{p_{\mathbf{f}}}^{\mathbf{f}}$ sont calculées respectivement à partir de la solution microscopique obtenue sur le domaine entier, telles que :

$$\langle p_{\mathbf{f}} \rangle^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega_{\mathbf{f}}|} \int_{\Omega_{\mathbf{f}}} p(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) dv \quad (1.43)$$

et

$$\overline{p_{\mathbf{f}}}^{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Sigma_{\mathbf{f}}|} \int_{\Sigma_{\mathbf{f}}} p(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) ds \quad (1.44)$$

ESTIMATION DU GRADIENT Le système matériel S est décomposé en N cellules de base Ω_i disposées périodiquement suivant le vecteur unitaire \mathbf{e}_x et un pas désigné Δx . Les cellules sont identiques entre-elles de sorte que, pour tout entier $1 \leq i \leq N$, $S = \bigcup_i \Omega_i$. La variable discrète x_i localise le volume Ω_i . Soit φ une grandeur scalaire qui prend une valeur discrète φ_i telle que $\varphi_i = \varphi(x_i)$. Une estimation au premier ordre est retenue pour le calcul du gradient cellulaire $(\nabla \varphi)_i$ défini sur Ω_i tel que:

$$(\nabla \varphi)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x} \quad (1.45)$$

CALCUL DES EFFORTS PARIÉTAUX Les échanges $\mathbf{I}_{\mathbf{fs}}$ à l'interface fluide-solide s'expriment en fonction du tenseur des contraintes fluide défini à l'échelle microscopique, tel que:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{fs}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{\mathbf{fs}}} -\overline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{f}} ds, \quad (1.46)$$

$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ vérifiant la relation (1.49). La surface d'intégration dépend de la définition de la cellule de base considérée, dont un exemple est donné à la Figure 1.8.

ESTIMATION DES TERMES La Table 1.3 regroupe l'estimation numérique des différents termes mis en jeu dans les équations (1.41) et (1.42). Ces estimations sont réalisées pour trois types de cellules de base toutes définies avec la même distribution volumique $\phi_{\mathbf{f}}$, mais de distributions surfaciques $\varepsilon_{\mathbf{f}}$ différentes. La Figure 1.9 représente ces trois cellules de base:

- $\varepsilon_f = \varepsilon_{f1}$ tel que la frontière de la cellule soit strictement dans la phase fluide, soit $\varepsilon_{f1} = 1$.
- $\varepsilon_f = \varepsilon_{f2}$ tel que le taux de présence fluide sur la frontière de la cellule soit égal à celui défini dans son volume, soit $\varepsilon_{f2} = \phi_f$.
- $\varepsilon_f = \varepsilon_{f3}$ tel que la frontière de la cellule présente une distribution de la phase fluide différente des deux configurations ci-dessus.

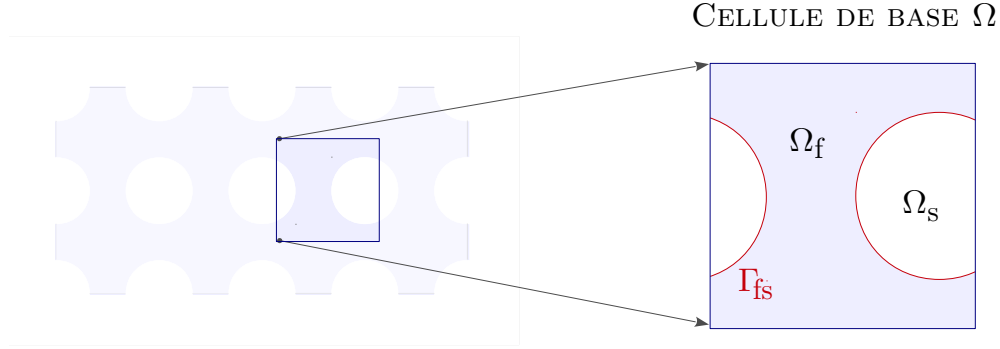


FIGURE 1.8 – Exemple de cellule de base

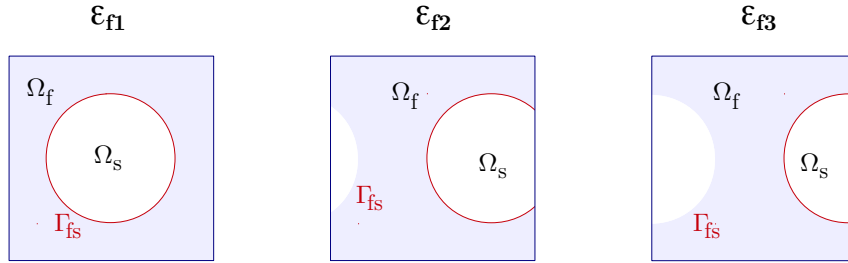


FIGURE 1.9 – Distributions surfaciques des phases suivant la cellule de base considérée

Pour chaque ε_f considéré, l'écart entre les termes impliqués dans la prise de moyenne globale est inférieur à 1%, ce qui, compte tenu de l'ordre faible retenu pour l'estimation du gradient cellulaire, traduit un bon accord quantitatif entre les échanges interfaciaux et le gradient de pression. Néanmoins, la prise de moyenne locale présente un bon accord quantitatif seulement pour une cellule de base présentant des fractions de distribution volumique et surfacique équivalentes, soit lorsque $\phi_f = \varepsilon_f$. Pour les autres cas où $\phi_f \neq \varepsilon_f$, l'écart entre les termes impliqués dans la prise de moyenne locale est important, s'élevant au moins à 40%. L'équation obtenue par moyenne locale gouverne ce problème macroscopique d'équilibre hydrostatique seulement si les fractions de distribution volumique ϕ_f et surfacique ε_f des phases sont égales, tandis que celle obtenue par moyenne globale gouverne ce problème indépendamment des répartitions surfaciques et/ou volumiques de la phase fluide.

		Prise de moyenne locale		Prise de moyenne globale	
ε_f	\mathbf{I}_{fs}	$\phi_f \nabla \cdot \langle p_f \rangle^f$	écart (%)	$\varepsilon_f \nabla \cdot \overline{p_f}^f$	écart (%)
$\varepsilon_{f1} \neq \phi_f$	0,9874	0,5918	40,06	0,9874	< 1,0
$\varepsilon_{f2} = \phi_f$	0,5859	0,5918	< 1,0	0,5918	< 1,0
$\varepsilon_{f3} \neq \phi_f$	0,2821	0,5918	52,28	0,2821	< 1,0

TABLE 1.3 – Estimation des termes mis en jeu dans les équations issues des prises de moyenne locale et globale pour un écoulement de Darcy en faisceau de tubes périodique. Ces équations macroscopiques ne mettent en jeu que les échanges interfaciaux $\mathbf{I}_{fs} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{fs}} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}_s ds$ et le gradient de pression. Les prises de moyenne locale et globale aboutissent à des modèles qui se différencient par la contribution du gradient de pression dans l'équilibre hydrostatique, la charge \mathbf{I}_{fs} étant la même. Pour la prise de moyenne locale, un accord satisfaisant entre ces termes n'est vérifié que si la distribution des phases dans le VER est telle que $\phi_f = \varepsilon_f$; tandis que la prise de moyenne globale présente un bon accord (inférieur à 1%) pour tout VER considéré.

Ainsi, l'équation homogénéisée issue d'une prise de moyenne globale ne présente pas de condition vis-à-vis du VER pour être vérifié quantitativement. Dans le cadre de la présente étude, on opte donc pour la **prise de moyenne des équations intégrales** afin de modéliser le problème d'IFS à l'échelle macroscopique.

1.3.3 Modélisation

Rappel du problème microscopique

L'écriture généralisée de ces équations de bilan gouvernant un problème microscopique est rappelée ci-dessous, en omettant les variables locales $(\hat{\mathbf{x}}, t)$:

$$\frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho g \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_d + g^*$$

BILAN DE MASSE La fonction densité massique g de la masse est égale à l'unité. A l'échelle microscopique, les sources et échanges de masse par diffusion sont négligées.⁸. En tenant

8. L'ordre de grandeur d'un volume de contrôle dans le cadre de l'approximation du *milieu continu* est trop grand devant les distances inter-moléculaires pour que des échanges surfaciques par diffusion de masse puissent être significatifs.

compte de l'hypothèse d'incompressibilité vérifiée par l'écoulement, l'équation locale du bilan de masse définie dans Ω_f est la suivante :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.47)$$

BILAN DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT La fonction vectorielle densité de masse \mathbf{g} associée à la quantité de mouvement est égale à la vitesse locale du milieu \mathbf{v} . Les échanges de quantité de mouvement par diffusion à travers un volume de contrôle $d\Omega_f$ sont définis à partir du *vecteur contrainte* \mathbf{T} , supposé vérifier le principe d'action-réaction⁹, ainsi que le *théorème de Cauchy*. Dans ce cadre, il existe un champ tensoriel du second ordre $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ tel que :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varphi}}}_d(\hat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}, t, \mathbf{n}) = -\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(\hat{\mathbf{x}}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (1.48)$$

Le fluide considéré est newtonien ; sa loi de comportement en contrainte est donc :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + \mu(\overline{\overline{\nabla}}\mathbf{v} + {}^t\overline{\overline{\nabla}}\mathbf{v}) + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\overline{\overline{\mathbf{I}}} \quad (1.49)$$

Dans le cadre de l'hypothèse d'incompressibilité vérifiées par l'écoulement, le système gouvernant la dynamique dans le système continu fluide Ω_f s'écrit:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu(\overline{\overline{\nabla}}\mathbf{v} + {}^t\overline{\overline{\nabla}}\mathbf{v}) \right] \quad (1.50)$$

Application de la prise de moyenne globale

L'écriture généralisée des équations macroscopiques obtenues par prise de moyenne globale est rappelée ci-dessous, en omettant les variables (\mathbf{x}, t) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_\alpha \langle \rho_\alpha g_\alpha \rangle^\alpha) + \nabla \cdot (\varepsilon_\alpha \overline{\overline{\rho_\alpha g_\alpha}}^\alpha \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\varepsilon_\alpha \overline{\overline{\boldsymbol{\varphi}_{d\alpha}}}^\alpha) + \phi_\alpha \langle g_\alpha^* \rangle^\alpha - \mathbf{I}_{\alpha\beta}$$

BILAN DE MASSE Le bilan macroscopique équivalent au problème microscopique est :

$$\nabla \cdot (\varepsilon_f \overline{\overline{\rho_f}} \mathbf{v}) = 0$$

Le champ de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ représente la vitesse moyenne¹⁰ de la matière contenu dans Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \boldsymbol{\gamma}_f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \boldsymbol{\gamma}_s(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \end{aligned}$$

9. $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}, t, -\mathbf{n})$, avec \mathbf{n} définie comme la normale unitaire extérieur à la frontière de contrôle $d\Sigma_f$.

10. Pour rappel, cf. paragraphe 1.2.2 sur la modélisation du milieu continu et paragraphe 1.2.2 sur la prise de moyenne globale sur une équation de bilan généralisée.

Soit, en tenant compte de la définition d'une moyenne volumique:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f(\mathbf{x}, t) + \phi_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s(\mathbf{x}, t) \quad (1.51)$$

La masse volumique $\overline{\rho}_f^f$ est invariable d'une cellule à l'autre, et $\varepsilon_f = 1$ pour toute cellule du système. On en déduit l'équation de bilan de masse suivante :

$$\nabla \cdot (\phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\phi_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s) = 0 \quad (1.52)$$

BILAN DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT Le bilan macroscopique équivalent au problème microscopique est le suivant:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_f \langle \rho_f \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\varepsilon_f \overline{\rho_f \mathbf{v}_f}^f \otimes \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\varepsilon_f \overline{p_f}^f) + \nabla \cdot \left[\varepsilon_f \overline{\mu (\overline{\nabla \mathbf{v}} + {}^t \overline{\nabla \mathbf{v}})}^f \right] - \mathbf{I}_{fs}$$

$\varepsilon_s = 0$ et n'implique aucune contribution du tenseur des contraintes solide. La masse volumique ρ_f , la viscosité dynamique μ et la porosité surfacique ε_f sont constantes dans Ω_f et invariable d'une cellule à l'autre. On en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_f \rho_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\varepsilon_f \rho_f \overline{\mathbf{v}_f}^f \otimes \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\varepsilon_f \overline{p_f}^f) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f}}^f + {}^t \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f}}^f) - \mathbf{I}_{fs}$$

Et en tenant compte de la définition du champ de vitesse \mathbf{v} donnée par l'équation (1.51), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_f \rho_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f}^f \otimes \phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) &= -\nabla \cdot (\varepsilon_f \overline{p_f}^f) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f}}^f + {}^t \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f}}^f) \\ &\quad - \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f}^f \otimes \phi_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s) - \mathbf{I}_{fs} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Les échanges \mathbf{I}_{fs} à l'interface fluide-solide s'expriment en fonction du tenseur des contraintes fluide défini à l'échelle microscopique:

$$\mathbf{I}_{fs}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{fs}} \overline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \cdot \mathbf{n}_s ds$$

soit,

$$\mathbf{I}_{fs}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma_{fs}} \left[-p(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \overline{\mathbf{I}} + \mu (\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)} + {}^t \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)}) \right] \cdot \mathbf{n}_s ds.$$

La surface d'intégration Γ_{fs} correspond à la frontière extérieure de la structure appartenant à la cellule considérée.

SYSTÈME À RÉSOUDRE Le problème macroscopique d'interaction fluide-solide dépend de la variable temporelle t et de la variable discrète \mathbf{x} localisant la position d'une cellule de base dans le système d'étude. Le système d'équations obtenu est valable uniquement dans le cadre des hypothèses et propriétés énoncées en début de section, à savoir pour un niveau d'observation spatiale des phénomènes se référant à la cellule de base. En dessous de cette échelle, il n'est plus légitime de résoudre le système d'équations ci-dessous. Le couple de variables (\mathbf{x}, t) est omis pour alléger l'écriture du système:

- *Bilan de la masse*

$$\nabla \cdot (\phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\phi_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s) = 0$$

- *Bilan de la quantité de mouvement*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_f \rho_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f}^f \otimes \phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) &= -\nabla(\varepsilon_f \overline{p_f}^f) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\overline{\overline{\mathbf{v}_f}^f} + {}^t \overline{\overline{\mathbf{v}_f}^f}) \\ &\quad - \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f}^f \otimes \phi_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s) - \frac{\mathbf{F}}{|\Omega|} \end{aligned}$$

- *Déplacement de Ω_s dans Ω*

$$\overline{\overline{M}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \overline{\overline{K}} \mathbf{u}_s = \mathbf{F}$$

Les paramètres ϕ_s , ϕ_f , ε_s et ε_f sont connus et conditionnés par la définition de la cellule de base choisie pour la résolution du problème. Les masse $\overline{\overline{M}}$, raideur $\overline{\overline{K}}$, masse volumique ρ_f et viscosité dynamique μ sont des paramètres connus, dépendant de la nature des phases mises en jeu dans le milieu hétérogène. Les inconnues du problème restent :

- le déplacement \mathbf{u}_s d'un élément solide contenu dans Ω
- la vitesse moyenne de l'écoulement $\langle \mathbf{v}_f \rangle^f$ dans le volume Ω_f
- la vitesse moyenne de l'écoulement $\overline{\mathbf{v}_f}^f$ sur la frontière Σ_f
- la pression moyenne de l'écoulement $\overline{p_f}^f$ sur la frontière Σ_f
- le gradient tensoriel moyen $\overline{\overline{\mathbf{v}_f}^f}$ sur la frontière Σ_f
- la force pariétale hydrodynamique \mathbf{F} exercée sur une structure Ω_s

Le problème à résoudre fait apparaître ainsi **7 équations scalaires et 22 inconnues**. Une *loi de fermeture* pour le vecteur force hydrodynamique \mathbf{F} est proposée dans le *Chapitre 2* suivant. La méthode numérique adoptée pour résoudre ce système est présentée au *Chapitre 3* et permet d'établir une relation entre les moyennes volumiques $\langle \phi_f \rangle^f$ et surfaciques $\overline{\phi_f}^f$.

Chapitre 2

FERMETURE DES CHARGES HYDRODYNAMIQUES

Sommaire

2.1	Régime vibratoire en faisceaux	46
2.2	Modèle de fermeture	49
2.2.1	État de l'art	49
2.2.2	Formulation pour le problème homogénéisé	52
2.3	Estimation numérique des coefficients hydrodynamiques	56
2.3.1	Approche numérique multi-échelle	56
2.3.2	Domaine réduit représentatif	58
2.4	Sensibilité aux paramètres adimensionnels	60
2.5	Représentativité des coefficients	64

Ce chapitre est dédié à la formulation des efforts hydrodynamiques exercés sur les structures d'un large réseau de tubes. Les hypothèses établies pour l'homogénéisation des faisceaux restent valables pour la modélisation des forces hydrodynamiques, à savoir : 1 - un problème plan défini suivant la section droite des structures, 2 - l'attribution d'un comportement d'oscillateur harmonique pour toute structure mobile, 3 - un écoulement incompressible, en régime laminaire. Le modèle de force proposé pour fermer le problème homogénéisé est conçu pour permettre de restituer :

- le comportement vibratoire de chaque structure
- et l'écoulement moyen dans chaque cellule de base du système.

Ce double enjeu nécessite une bonne estimation des pertes de charges hydrodynamiques instationnaires induites par la présence d'un cylindre aussi bien fixe que mobile. Le modèle doit tenir compte de la dynamique instationnaire de l'écoulement pour toute cellule du système, et ceci, indépendamment des mouvements éventuels des structures : en effet, un cylindre maintenu fixe peut côtoyer un écoulement instationnaire généré par la mise en mouvement d'un autre cylindre quelconque du faisceau.

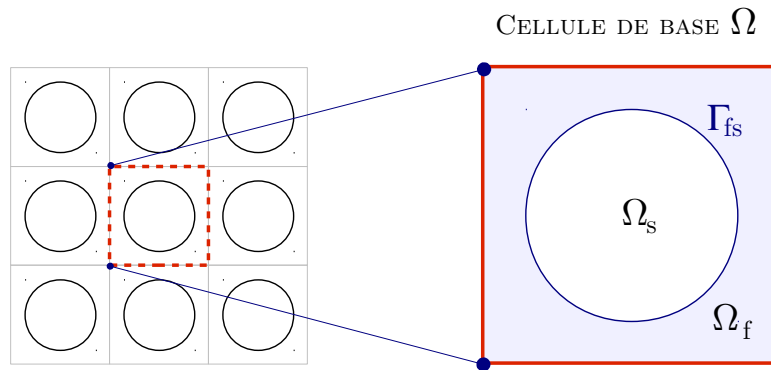


FIGURE 2.1 – Cellules de base dans un faisceau de 9 cylindres : Chaque cellule de base représente la présence d'un cylindre et de l'écoulement dans la limite des frontières cellulaires.

Dans un premier temps, un état de l'art rappelle les formulations possibles pour les efforts fluides exercés sur des cylindres dans les faisceaux. Une écriture de force répondant aux critères introduits ci-dessus est proposée, et une méthode de fermeture numérique permet d'estimer les coefficients inconnus intervenant dans le modèle de force retenu. Enfin, la pertinence de la méthode est évaluée vis à vis des efforts exercés sur un très grand nombre de cylindres.

2.1 Régime vibratoire en faisceaux

NATURE DES RÉPONSES VIBRATOIRES Les réponses vibratoires d'une structure élançée en interaction avec un écoulement se classent en trois catégories de régimes dynamiques:

1. **Réponse inconditionnellement stable:** Si la structure est déplacée de sa position d'équilibre, elle la retrouve inconditionnellement au cours du temps.
2. **Réponse conditionnellement stable:** Si la structure est déplacée de sa position d'équilibre, ses amplitudes vibratoires sont limitées par un extremum A_m et restent bornées au cours du temps.
3. **Réponse instable:** Si la structure est déplacée de sa position d'équilibre, ses amplitudes vibratoires franchissent la limite fixée par l'extremum A_m et divergent au cours du temps.

PARAMÈTRES ADIMENSIONNELS Les régimes vibratoires sont conditionnés par la nature du chargement pariétal hydrodynamique exercé sur une structure donnée et le chargement hydrodynamique est gouverné par l'ensemble des paramètres mécaniques caractérisant le système tubulaire considéré. Parmi ces paramètres on trouve: la masse volumique du fluide ρ_f , sa viscosité dynamique μ , la masse volumique de la structure ρ_s , sa fréquence propre f_s et les sollicitations extérieures à la structure. La contribution respective de ces différents paramètres dans la nature des interactions fluide-structure se caractérise par la valeur de *nombres caractéristiques adimensionnels* dont les principaux sont les suivants:

- Pas réduit	$P^* = \frac{P}{D}$
- Rapport de masse	$m^* = \frac{\rho_s}{\rho_f}$
- Nombre de Reynolds	$Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$
- Vitesse réduite	$U_r = \frac{U_\infty}{f_s D}$
- Nombre de Keulegan-Carpenter	$Kc = \frac{U_\infty}{f_t D}$
- Nombre de Stokes	$St = \frac{f_s D^2}{\nu}$

U_∞ est la vitesse d'un écoulement incident au système tubulaire, $\nu = \frac{\mu}{\rho_f}$ est la viscosité cinématique du fluide, P le pas du faisceau et D le diamètre d'une structure cylindrique. Les nombres

adimensionnels permettent de caractériser les charges hydrodynamiques exercées sur une structure donnée, conditionnant le régime dynamique du système tubulaire considéré.

CYLINDRE SEUL Pour un cylindre isolé, fixe et soumis à un écoulement incident, la littérature montre que la contribution visqueuse du chargement hydrodynamique évolue en fonction du régime de l'écoulement incident (Lienhard [37], Williamson [77]): cela se traduit par la dépendance du coefficient de traînée C_D au nombre de Reynolds conformément à l'allure du tracé de la Figure 2.2.

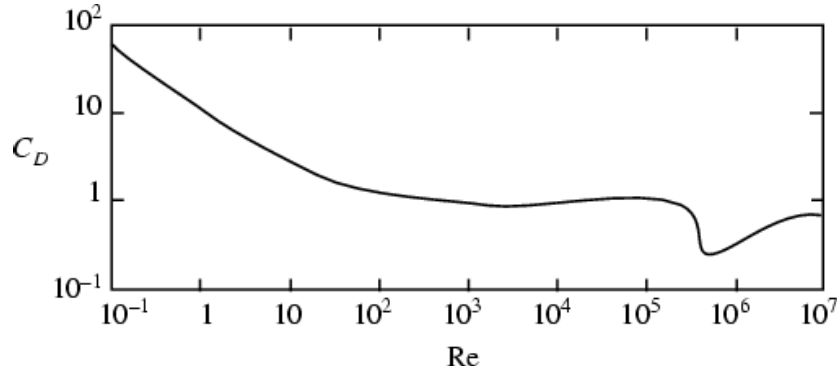


FIGURE 2.2 – Coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds Re pour un cylindre seul en milieu infini soumis à un écoulement incident.

Pour une structure oscillante, la masse réduite m^* et la vitesse réduite U_r sont à prendre en considération. Ces dernières traduisent l'action des efforts fluides dans la direction de la portance impactant les amplitudes et fréquences vibratoires de la structure considérée (Khalak & Williamson [32, 34, 33, 35], Sumer & Fredsøe [67], Hover [27], Bearman [4], Païdoussis [47]).

Pour deux masses réduites m^* différentes et un nombre de Reynolds Re invariant, la Figure 2.3 illustre une évolution des maxima d'amplitudes d'oscillations A_m d'un cylindre donné en fonction de la vitesse réduite U_r .

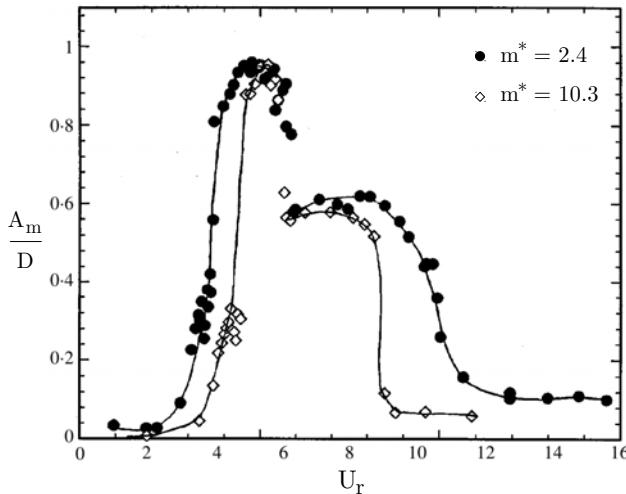


FIGURE 2.3 – Évolution des maxima d'amplitudes d'oscillation A_m en fonction de la vitesse réduite U_r , pour deux masses réduites différentes et un nombre de Reynolds invariant ($Re = 10^4$); ces mesures sont issues des travaux de Khalak & Williamson [32] sur une structure cylindrique isolée, en oscillation suivant un degré de liberté, sous l'effet d'un écoulement incident.

CYLINDRES EN FAISCEAUX Pour les faisceaux ou *groupes* de cylindres, d'autres paramètres entrent en jeu dans la caractérisation du régime vibratoire : en plus du nombre de Reynolds Re , de la masse réduite m^* et de la vitesse réduite U_r , il faut considérer le **pas réduit du faisceau** P^* et son **motif** qui conditionnent la nature du confinement de l'écoulement, ainsi que le **nombre de cylindres mobiles**. La figure 2.4 présente une superposition de diagrammes valables pour de petits groupes de 9 cylindres disposés suivant un pas carré, dont seul un cylindre est libre d'osciller: chaque diagramme est identifié par un symbole et associé à un pas réduit P^* donné. Dans la publication *A review theoretical models for fluidelastic instability of cylinder arrays in cross-flow* (1995), Price [50] recense les travaux majeurs dédiés à la définition des critères de stabilité pour les arrangements de cylindres. Il confronte les diagrammes obtenus pour différentes configurations et caractérise les effets du confinement de l'écoulement, ainsi que ceux du nombre de cylindres mobiles, sur la stabilité du système. Deux tendances globales se dégagent:

- Les instabilités apparaissent pour des vitesses réduites critiques U_{rc} d'autant plus faibles que le confinement est important, soit que le pas réduit P^* est faible.
- Les instabilités apparaissent pour des vitesses réduites critiques U_{rc} d'autant plus faibles que le nombre de cylindres mobiles est grand.

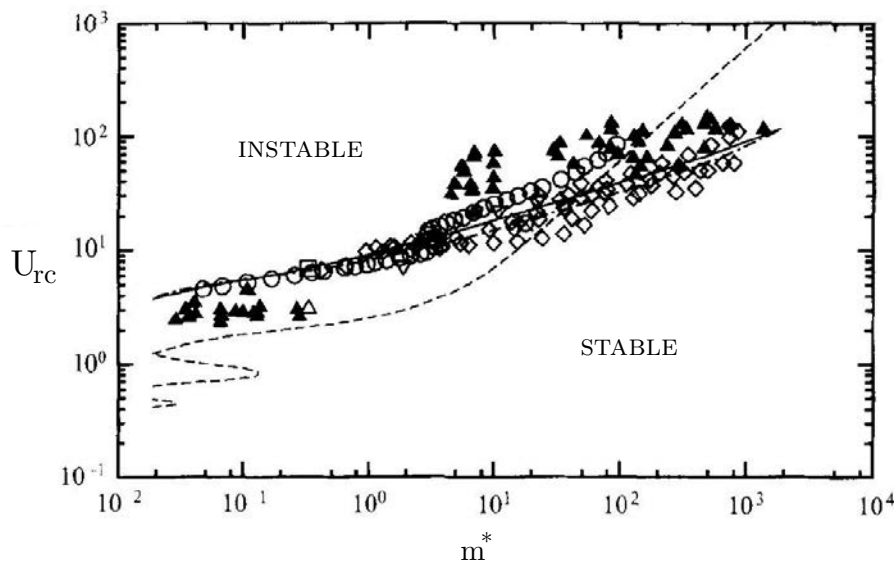


FIGURE 2.4 – Diagrammes de stabilité pour un arrangement de neuf cylindres disposés selon un pas carré. Chaque diagramme correspond à un symbole et est construit à partir de l'évolution de la vitesse réduite critique U_{rc} en fonction de la masse réduite m_* , pour un pas réduit P^* donné. Ce graphe est issu des travaux publiés de Granger et Païdoussis [20] sur les instabilités fluide-élastiques des faisceaux.

2.2 Modèle de fermeture

2.2.1 État de l'art

La littérature propose de nombreux modèles de forces décrivant le comportement vibratoire de cylindres en configurations de faisceaux périodiques, comme le modèle de Païdoussis et Price (1986) [53] et Roger (1980) [60].

Formule de Rogers (1984)

L'effet des charges hydrodynamiques \mathbf{F} sur la réponse vibratoire d'un oscillateur peut être considéré comme un facteur modulant les paramètres de masse et d'amortissement de la structure. Pour un oscillateur de masse propre m , d'amortissement propre c et de raideur propre k , la réponse en déplacement en présence d'un écoulement se traduit par:

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2}(t) + c \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}(t) + k \mathbf{u}_s(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

avec

$$\mathbf{F}(t) = -m_a \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2}(t) - c_a \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}(t) \quad (2.2)$$

m_a étant désigné comme *coefficient de masse ajoutée*, et c_a comme *coefficient d'amortissement ajouté*. Cette approche est proposée par Chen et al. [13] qui réalise des études analytiques et expérimentales sur un cylindre seul, confiné dans une enceinte circulaire, oscillant dans un fluide visqueux. Les expressions suivantes des coefficients ajoutés sont obtenues :

$$m_a = \rho_f D^2 \frac{\pi}{4} \frac{1 + (D/D_e)^2}{1 - (D/D_e)^2} + \sqrt{\frac{\pi}{St}}$$

$$c_a = 2\pi^{\frac{3}{2}} \rho_f \nu \frac{1 + (D/D_e)^3}{(1 - (D/D_e)^2)^2} \sqrt{St}$$

f_s étant la fréquence propre de la structure, D_e le diamètre de l'enceinte extérieure et St le nombre de Stokes. Rogers et al. [60] adapte l'expression des coefficients m_a et c_a pour un confinement régit par la présence de cylindres voisins et non plus d'une enceinte close. Pour un arrangement périodique de cylindres suivant un pas désigné P , le paramètre de confinement D/D_e est défini comme une fonction du pas réduit P/D , soit :

$$\frac{D_e}{D} = \left(a + b \frac{P}{D} \right) \frac{P}{D}$$

où a et b sont des coefficients dont les valeurs dépendent du schéma de disposition spatiale des cylindres (Rogers et al. [60], Pettigrew et al. [49]).

Modèle de Païdoussis et Price (1986)

Païdoussis et Price réalisent plusieurs études sur le comportement vibratoire d'un cylindre entouré de cylindres maintenus fixes [48, 52, 53, 51, 54] (Figure 2.5). Ils s'intéressent en particulier aux efforts de nature hydrodynamique pouvant être responsables de l'augmentation exponentielle des amplitudes de déplacement au cours du temps : il s'agit du phénomène d'*instabilité fluide-élastique*. Pour un tel système soumis à un écoulement transverse aux déplacements en portance, Païdoussis et Price [53] proposent le modèle suivant :

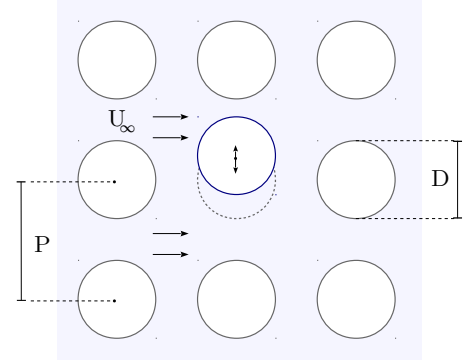


FIGURE 2.5

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 dz D \begin{bmatrix} \mathbf{C}_D \\ \mathbf{C}_L \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho U_\infty \frac{dz D}{a} \begin{bmatrix} -2\mathbf{C}_D & \mathbf{C}_L \\ -2\mathbf{C}_L & -\mathbf{C}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{sx}}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial u_{sy}}{\partial t}(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

U_∞ étant la norme de la vitesse de l'écoulement incident au faisceau, dz la longueur du cylindre, \mathbf{C}_D et \mathbf{C}_L respectivement les coefficients de traînée et de portance et a le rapport entre la vitesse de l'écoulement interstitiel et celle de l'écoulement incident au faisceau. La valeur des coefficients \mathbf{C}_D et \mathbf{C}_L dépend du motif du faisceau, du pas ainsi que de la *vitesse réduite*, paramètre adimensionnel dépendant de U_∞ , de D et de la fréquence propre du cylindre. Price [50] souligne l'importance de la contribution instationnaire de l'écoulement dans l'estimation des forces pariétales fluides au cours du temps :

” [...] it is shown that the most important parameter for predicting fluidelastic instability is the unsteady nature of the interstitial flow in the array ; specifically, the phase-lag between cylinder motion and fluid forces generated thereby. ”

D'autres variantes du modèle sont proposées tenant compte du déphasage temporel qu'il existe entre le déplacement du cylindre et l'action de la force hydrodynamique [20, 50, 45, 46].

Formulation de Morison (1950) et ses variantes

Morison [44][43] propose une formulation pour estimer les efforts exercés par un *écoulement oscillant* - comme la propagation d'ondes en milieu marin - sur un cylindre fixe en milieu non-confiné¹. Cette formulation est valable pour des écoulements dont le comportement moyen n'est pas affecté par la présence de la structure ; le diamètre du tube est suffisamment petit devant la longueur de l'onde incidente, pour que les perturbations induites dans l'écoulement

1. Ces travaux sont dédiés à la caractérisation du chargement des vagues sur des structures offshore.

soient négligeables. Le chargement hydrodynamique exercé sur un cylindre fixe se caractérise par deux composantes distinctes :

- la *force de traînée* inclut les effets du cisaillement visqueux que génère le développement de la couche limite au voisinage du cylindre. Cette composante évolue en quadrature de phase avec la vitesse de l'écoulement incident.
- la *force d'inertie* tient compte des effets du gradient de pression adverse que génère le développement de la couche limite au voisinage du cylindre ainsi que des effets de masse ajoutée. Chacune de ces contributions évolue en phase avec l'accélération de l'écoulement.

La force fluide totale \mathbf{f} vérifie la relation suivante :

$$\mathbf{F} = \rho_f dz \frac{\pi D^2}{4} \mathbf{C}_M \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_f dz D \mathbf{C}_D |\mathbf{v}_f| \mathbf{v}_f \quad (2.4)$$

Le champ de vitesse fluide \mathbf{v}_f est prescrite par le courant incident et vérifie une loi de la forme $|\mathbf{v}_f| = U_\infty \sin(2\pi f_f t)$, avec f_f la fréquence de l'onde de propagation. Les coefficients de traînée \mathbf{C}_D et de masse \mathbf{C}_M font l'objet de nombreuses études expérimentales afin caractériser leurs dépendances vis-à-vis des régimes de l'écoulement incident. Pour un écoulement permanent de vitesse $|\mathbf{v}_f| = U_\infty$, ces coefficients dépendent du **nombre de Reynolds Re** . Pour un écoulement oscillant, ils dépendent du nombre de Reynolds mais aussi du **nombre de Keulegan-Carpenter Kc** ². Les travaux de Sarpkaya (1976) fournissent une estimations des coefficients \mathbf{C}_M et \mathbf{C}_D pour des gammes très variées de Re allant jusqu'à 7.10^5 et de Kc allant jusqu'à 150 [64].

Le modèle de Morison (équation 2.4) concerne uniquement les efforts hydrodynamiques exercés sur un cylindre maintenu **fixe**. Malhotra et Penzien (1969) proposent une extension pour les structures mobiles [39]. La vitesse de l'écoulement \mathbf{v}_f est remplacée par la vitesse relative de l'écoulement par rapport au déplacement du cylindre:

$$\mathbf{F} = \rho_f dz \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \rho_f dz \mathbf{C}_M \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \rho_f dz D \mathbf{C}_D (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s| \quad (2.5)$$

Dans ce cas, les coefficients \mathbf{C}_D et \mathbf{C}_M dépendent de la **vitesse réduite U_r** . Pour de faibles valeurs de Kc et de U_r (généralement inférieures à 10) Moe et Verley (1978, [42]) proposent une autre formulation de la force de traînée distinguant les contributions respectives de la dynamique fluide de celles de la dynamique structure. Cette extension est particulièrement adaptée à des gammes de U_r et/ou de Kc modérées :

$$\mathbf{F} = \rho_f dz \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \rho_f dz \mathbf{C}_M \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \rho_f dz D \mathbf{C}_{DF} |\mathbf{v}_f| \mathbf{v}_f - \frac{1}{2} \rho dz D \mathbf{C}_{DS} |\mathbf{v}_s| \mathbf{v}_s$$

2. On distingue le nombre de Keulegan-Carpenter Kc du nombre de Stokes St par l'origine du paramètre de fréquence considéré : Kc dépend de la fréquence de propagation d'un écoulement (des vagues par exemple), tandis que St dépend de la fréquence d'oscillation d'une structure.

2.2.2 Formulation pour le problème homogénéisé

Dans le cadre de l'homogénéisation cellulaire des faisceaux, le modèle de force être valide à la fois pour des cylindres maintenus fixes et pour ceux libres de se déplacer sous une sollicitation externe. Cela nécessite de modéliser les pertes de charges occasionnées par la présence d'un cylindre fixe dans le domaine d'un écoulement oscillant. A cet égard, l'homogénéisation présente un avantage particulier compte tenu des informations que fournit une cellule de base (figure 2.1) : elle restitue, qualitativement et quantitativement, l'évolution temporelle des champs de vitesse et d'accélération **propres à l'écoulement moyen proche-paroi** de la structure considérée. Ainsi, la prise en compte *explicite* des champs instationnaires propres à l'écoulement dans l'écriture du modèle constitue un élément clé pour évaluer fidèlement les pertes de charges hydrodynamiques sur structures fixes et/ou mobiles.

Pour cette raison, il est proposé d'avoir recours un modèle de forces faisant intervenir explicitement les champs instationnaires propres à l'écoulement. Les modèles de Morison *re-vistés* et proposés par Malhotra & Penzien (1969) [39] et Moe & Verley (1978) [42] en sont des exemples (respectivement équations (2.5) et (2.2.1)). A l'image de ces modèles, la formulation retenue présente le double intérêt de:

1 - tenir compte à la fois des **forces d'inertie** et des **forces de traînée**

2 - distinguer les contributions respectives de la dynamique fluide et de celle de la structure.

La formulation du modèle est issue de la caractérisation des efforts hydrodynamiques pour deux configurations de référence : pour un écoulement incident sur cylindre fixe, puis pour un cylindre mobile en fluide au repos.

Notations

Pour alléger les notations, les champs de vitesses macroscopiques fluide $\langle \mathbf{v}_f \rangle^f$ et solide $\langle \mathbf{v}_s \rangle^s$ sont notés comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_f \rangle^f &\longrightarrow \mathbf{V}_f \\ \langle \mathbf{v}_s \rangle^s &\longrightarrow \mathbf{V}_s \end{aligned} \quad (2.6)$$

Par la suite, désigne \mathbf{f} désigne le vecteur force hydrodynamique par unité de longueur vérifiant la relation suivante :

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{dz} \quad (2.7)$$

Écoulement incident sur cylindre fixe

Un *courant stationnaire* de vecteur vitesse incidente \mathbf{v}_∞ entraîne des frottements visqueux sur un cylindre fixe, traduisant l'action d'une force de traînée stationnaire \mathbf{f}_D :

$$\mathbf{f}_D = \frac{1}{2} \rho_f D C_D |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \quad (2.8)$$

C_D est le coefficient de traînée et varie avec le nombre de Reynolds Re . Pour des régimes d'écoulements dont le nombre de Reynolds est supérieur à 40, un lâché de tourbillons se forment dans le sillage du cylindre³ (Lienhard [37], Williamson [77], Wen et Lin [74]). La figure 2.6 représente l'allure du sillage en fonction du régime de l'écoulement.

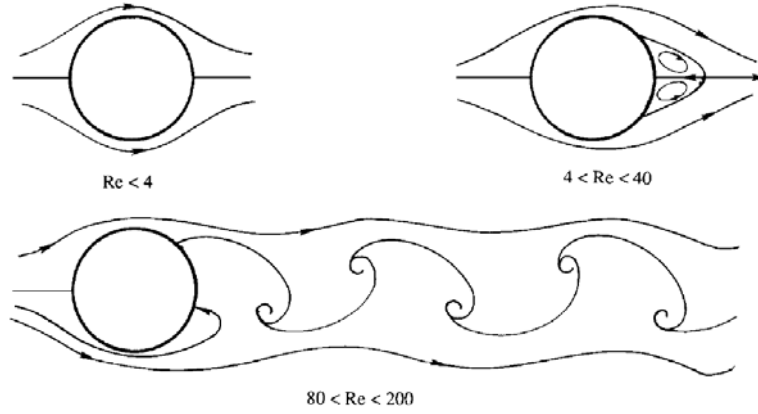


FIGURE 2.6 – Représentation du sillage en amont d'un cylindre fixe soumis à différents régimes d'écoulements incidents et stationnaires

La formation de tourbillons induit l'apparition d'une composante fluctuante de la force de traînée ainsi que celle d'une force d'inertie fluctuante \mathbf{f}_I ⁴ définie suivant la direction transverse au courant incident. La force \mathbf{f}_I a une intensité d'autant plus importante que Re est grand et se caractérise par deux phénomènes hydrodynamiques instationnaires :

- les effets de masse ajoutée \mathbf{f}_M - mis en évidence notamment par Morison [44, 43] et Sarpkaya [64] - dépendent linéairement de l'accélération de l'écoulement:

$$\mathbf{f}_M = \rho_f(1 + C_M) \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t}$$

- les effets de poussée \mathbf{f}_L dépendent linéairement de la vitesse de l'écoulement et induisent un déphasage possible entre la force pariétale et la fréquence de détachement des tourbillons (Hover et al. [26, 27], Techet [71]), soit :

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{2} \rho_f D C_L U (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_\infty)$$

La superposition de \mathbf{f}_M et \mathbf{f}_L permet d'en déduire la force d'inertie \mathbf{f}_I :

$$\mathbf{f}_I = \rho_f(1 + C_M) \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_f D C_L U (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_\infty) \quad (2.9)$$

3. L'ensemble des tourbillons dans le sillage du cylindre est désignée comme *allée de Von Karman*.

4. Cette force d'inertie est nommée *portance* lorsqu'elle s'exerce suivant la direction des forces de gravité.

U désigne la vitesse caractéristique de l'écoulement, et est généralement définie par $U = |\mathbf{v}_\infty|$ pour un courant incident sur structure fixe. \mathbf{C}_{MF} est le coefficient de masse ajoutée et \mathbf{C}_{LF} est le coefficient de poussée (ou de portance). La vitesse \mathbf{v}_f considérée comme locale est en général définie comme une fonction sinusoïdale, dépendante de la fréquence \mathbf{f}_f du lâcher tourbillonnaire.

Une notation vectorielle est adoptée ici tandis que les références citées proposent des formulations par composantes de force. Le choix d'une écriture vectorielle permet d'évaluer les pertes de charges fluctuantes dans les directions à la fois transverse et longitudinale à l'écoulement incident. Ainsi, pour la force de poussée \mathbf{f}_L , il convient de corriger la vitesse effective de l'écoulement \mathbf{v}_f par la vitesse du courant incident stationnaire \mathbf{v}_∞ afin d'éviter une superposition des effets de traînée stationnaire. Finalement, les efforts hydrodynamiques totaux engendrés par un écoulement incident, stationnaire ou oscillant, s'exerçant sur un cylindre fixe, s'expriment par :

$$\mathbf{f} = \rho_f(1 + \mathbf{C}_M) \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho D \mathbf{C}_L U (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_\infty) + \frac{1}{2} \rho D \mathbf{C}_D |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \quad (2.10)$$

Cylindre mobile en fluide au repos

Pour un cylindre en oscillations forcées dans un fluide initialement au repos ($\mathbf{v}_\infty = \vec{0}$), les forces de traînée stationnaires sont négligées :

$$\mathbf{f}_D = \vec{0}$$

La mise en mouvement rectiligne du cylindre entraîne la formation de tourbillons se propageant de part et d'autre de la structure mobile. De même que pour un cylindre fixe sous écoulement incident, l'échappement de tourbillons induit l'apparition d'une force d'inertie fluctuante \mathbf{f}_I , définie suivant la direction des déplacements. La force d'inertie \mathbf{f}_I caractérisée pour un cylindre fixe (équation 2.9) est corrigée par la contribution de la dynamique structure. Pour chaque composante de la force, cela se traduit par :

- des effets de masse ajoutée, dépendant linéairement de l'accélération du cylindre :

$$\mathbf{f}_M = \rho_f(1 + \mathbf{C}_{MF}) \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} - \rho_f \mathbf{C}_{MS} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t}$$

- des effets de poussée, dépendant linéairement de la vitesse du cylindre (avec $\mathbf{v}_\infty = \vec{0}$) :

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{2} \rho D \mathbf{C}_{LF} U \mathbf{v}_f - \frac{1}{2} \rho D \mathbf{C}_{LS} U \mathbf{v}_s$$

La somme de \mathbf{f}_M et \mathbf{f}_L permet d'exprimer la force d'inertie \mathbf{f}_I , soit les efforts hydrodynamiques totaux \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = \rho_f(1 + \mathbf{C}_{MF}) \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} - \rho_f \mathbf{C}_{MS} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_f D \mathbf{C}_{LF} U \mathbf{v}_f - \frac{1}{2} \rho_f D \mathbf{C}_{LS} U \mathbf{v}_s \quad (2.11)$$

En l'absence de courant incident, la vitesse caractéristique de l'écoulement est définie comme $U = D f_f$, avec f_f la fréquence d'échappement tourbillonnaire. C_{MF} désignant le coefficient de masse ajoutée fluide, C_{MS} le coefficient de masse ajoutée solide, C_{LF} le coefficient de poussée fluide et C_{LS} le coefficient de poussée solide. La correction due à la dynamique du cylindre se traduit par une distinction entre les coefficients de nature fluide et solide. Malhotra & Penzien [39] portent cette correction sur le champ de vitesse fluide (équation 2.5), tandis que Moe & Verley [42] font une distinction entre les coefficients de traînée fluide et solide (eq. 2.2.1).

Cylindre mobile sous écoulement transverse

La superposition des efforts hydrodynamiques générés par un écoulement incident sur cylindre fixe d'une part (eq. 2.10), et par un cylindre mobile en fluide au repos d'autre part (eq. 2.11), permet d'exprimer le modèle finalement proposé pour la force totale \mathbf{f} s'exerçant sur une structure oscillante par unité de longueur.

Pour adapter ce modèle à l'homogénéisation des faisceaux, les variables \mathbf{v}_f et \mathbf{v}_s sont substituées aux vitesses macroscopiques (ou cellulaires) des phases fluide et solide. Il convient de prendre une précaution particulière pour la vitesse du courant incident \mathbf{v}_∞ : les forces de traînée \mathbf{f}_D sont relatives au champ de vitesse de **l'écoulement inter-tubes - ou interstitiel** - et non pas à celui de l'écoulement amont au faisceau en milieu fluide "infini" (contrairement au cas du cylindre isolé). De plus, la correction du champ de vitesse fluide dans l'expression de la force de poussée \mathbf{f}_L doit être effectuée à partir du **champ de vitesse incidente cellulaire** \mathbf{V}_∞ pour tenir compte des seuls effets fluctuants suivant la portance. Le champ de vitesse \mathbf{V}_∞ s'exprime :

$$\mathbf{V}_\infty = \mathbf{v}_\infty \frac{P - D}{\phi_f P} \quad (2.12)$$

où \mathbf{v}_∞ est la vitesse locale de l'écoulement inter-tube, P le pas du faisceau, D le diamètre d'un cylindre et ϕ_f la fraction volumique de la phase fluide au sein d'une cellule de base. En raison du confinement important des écoulements en faisceaux, la fréquence d'oscillation f_f fluide est supposée proche de celle des vibrations tubulaires f_s . D'où la vitesse caractéristique U :

$$U = D f_s = D \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.13)$$

A partir des considérations ci-dessus, le modèle de force \mathbf{F} proposé pour la fermeture du problème homogénéisé s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \rho_f dz \frac{\pi D^2}{4} \left[(1 + C_{MF}) \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} - C_{MS} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} \right] \\ & + \frac{1}{2} \rho_f dz D U [C_{LF}(\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_\infty) - C_{LS} \mathbf{V}_s] + \frac{1}{2} \rho_f dz D C_D |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les cinq coefficients C_{MF} , C_{MS} , C_{LF} , C_{LS} et C_D mis en jeu dans l'écriture de ce modèle doivent être estimés pour résoudre un problème homogénéisé.

2.3 Estimation numérique des coefficients hydrodynamiques

Il existe trois options pour approcher un modèle : les mesures expérimentales, la résolution analytique et la simulation numérique. Les banques de données expérimentales actuellement disponibles pour les mesures vibratoires en larges faisceaux de tubes ne correspondent pas avec le type d'analyse requis pour la présente étude. Les configurations envisagées pour les écoulements en proche-paroi d'un cylindre, fixe ou non, au sein d'un large faisceau sont trop complexes pour envisager une résolution analytique des équations de transport mises en jeu. Par conséquent, la simulation numérique de la dynamique d'un cylindre à l'échelle microscopique reste l'alternative la plus accessible et la plus précise pour proposer une estimation adéquate des coefficients hydrodynamiques pour les configurations souhaitées.

2.3.1 Approche numérique multi-échelle

Étape 1 : Solution numérique à l'échelle microscopique

Pour une configuration de faisceau donnée, les quantités cellulaires \mathbf{F} , \mathbf{V}_f , \mathbf{V}_s , $\frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t}$ et $\frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t}$ sont estimées au cours du temps à partir de la solution à l'échelle microscopique.

Considérons une cellule Ω constituée d'un cylindre solide indéformable désigné Ω_s et d'un domaine fluide désigné Ω_f . L'interface entre les phases fluide et solide est notée Γ_{fs} . La force pariétale hydrodynamique calculée à partir de la solution de l'écoulement définie continûment dans Ω_f est appelée $\tilde{\mathbf{F}}$ et vérifie :

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma_{fs}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \cdot \mathbf{n}_s ds$$

soit pour un écoulement newtonien et incompressible :

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma_{fs}} \left[-p_f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \mu \left(\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) + {}^t \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_f(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \right) \right] \cdot \mathbf{n}_s ds .$$

Le symbole $\tilde{}$ est utilisé pour identifier les quantités macroscopiques - ou cellulaires - calculées à partir de la solution microscopique. Le modèle de force hydrodynamique s'écrit:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} = & \rho_f dz \frac{\pi D^2}{4} \left[(1 + C_{MF}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_f}{\partial t} - C_{MS} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_s}{\partial t} \right] \\ & + \frac{1}{2} \rho_f dz D U \left[C_{LF} (\tilde{\mathbf{V}}_f - \mathbf{V}_\infty) - C_{LS} \tilde{\mathbf{V}}_s \right] + \frac{1}{2} \rho_f dz D C_D |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec,

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|\Omega_{\mathbf{f}}|} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \quad (2.16)$$

et,

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{|\Omega_{\mathbf{s}}|} \int_{\Omega} \mathbf{v}_{\mathbf{s}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \quad (2.17)$$

Étape 2 : Régression linéaire multiple de $\tilde{\mathbf{F}}$

La force $\tilde{\mathbf{F}}$ connue au cours du temps représente une *combinaison linéaire* des cinq coefficients $\mathbf{C}_{\mathbf{MF}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{MS}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{LF}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{LS}}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{D}}$ inconnus, eux mêmes corrélés aux champs de vitesse $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{f}}$ et $\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{s}}$ connus au cours du temps (relation (2.15)). Les méthodes de **Régression Linéaire Multiple (RLM)** sont adaptées à ce type de problème linéaire et permettent d'obtenir une estimation des paramètres inconnus. A partir de la solution numérique à l'échelle microscopique de l'écoulement dans $\Omega_{\mathbf{f}}$, on dispose d'un nombre fini d'observations k au cours du temps de la **variable à expliquer** $\tilde{\mathbf{F}}^k$ et des **variables explicatives indépendantes** $\mathbf{X}_{\mathbf{MF}}^k$, $\mathbf{X}_{\mathbf{MS}}^k$, $\mathbf{X}_{\mathbf{LF}}^k$, $\mathbf{X}_{\mathbf{LS}}^k$ et $\mathbf{X}_{\mathbf{D}}^k$. Ces variables sont reliées linéairement entre par la relation suivante :

$$\tilde{\mathbf{F}}^k = (1 + \mathbf{C}_{\mathbf{MF}})\mathbf{X}_{\mathbf{MF}}^k + \mathbf{C}_{\mathbf{MS}}\mathbf{X}_{\mathbf{MS}}^k + \mathbf{C}_{\mathbf{LF}}\mathbf{X}_{\mathbf{LF}}^k + \mathbf{C}_{\mathbf{LS}}\mathbf{X}_{\mathbf{LS}}^k + \mathbf{C}_{\mathbf{D}}\mathbf{X}_{\mathbf{D}}^k \quad (2.18)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\mathbf{MF}}^k &= \rho dz \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{f}}^k}{\partial t} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{MS}}^k &= -\rho dz \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{s}}^k}{\partial t} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{LF}}^k &= \frac{1}{2} \rho dz D U (\tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{f}}^k - \mathbf{V}_{\infty}) \\ \mathbf{X}_{\mathbf{LS}}^k &= -\frac{1}{2} \rho dz D U \tilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{s}}^k \\ \mathbf{X}_{\mathbf{D}}^k &= \frac{1}{2} \rho dz D |\mathbf{v}_{\infty}| \mathbf{v}_{\infty} \end{aligned}$$

Le **résidu** ε qui estime l'écart entre la mesure de $\tilde{\mathbf{F}}^k$ et le modèle de régression est défini par :

$$\varepsilon = \tilde{\mathbf{F}}^k - \left[(1 + \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{MF}})\mathbf{X}_{\mathbf{MF}}^k + \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{MS}}\mathbf{X}_{\mathbf{MS}}^k + \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{LF}}\mathbf{X}_{\mathbf{LF}}^k + \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{LS}}\mathbf{X}_{\mathbf{LS}}^k + \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{D}}\mathbf{X}_{\mathbf{D}}^k \right] \quad (2.19)$$

La méthode des moindres carrés permet de trouver l'ensemble des **estimateurs** $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{MF}}$, $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{MS}}$, $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{LF}}$, $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{LS}}$ et $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{D}}$ qui *minimise* la norme du résidu $\|\varepsilon\|^2$ sur un échantillon d'évènements de taille k . Il existe de nombreux ouvrages et supports de cours dédiés aux applications et mises en

œuvre d'une RLM par moindres carrés. De ce fait, cette méthode n'est pas détaillée ici ; on peut néanmoins se référer aux notes de cours de P. Besse [7], ou encore de R. Rakotomalala [57].

2.3.2 Domaine réduit représentatif

Une méthode est proposée pour estimer les coefficients inconnus du modèle de force à partir de la solution numérique de l'écoulement microscopique dans une cellule de base. Néanmoins, il n'est pas envisageable d'appliquer cette procédure à chaque cellule d'un faisceau de grande dimension, car elle nécessiterait un recours à des calculs microscopiques très coûteux (dont on souhaite s'affranchir) et révoquerait l'intérêt de l'homogénéisation. La fermeture du problème macroscopique doit en effet engendrer de faibles coûts numériques et en même temps, fournir une estimation des coefficients la plus représentative possible du chargement hydrodynamique induit dans un large faisceau.

Les structures considérées présentent des propriétés géométriques et mécaniques identiques. Seuls sont considérés des systèmes pouvant se décomposer en cellules disposées périodiquement dans l'espace (Figure 2.1). Dans le cadre de ces hypothèses, il est possible de définir un système présentant des réponses mécaniques similaires à celles d'un large faisceau donné, mais de dimension significativement plus petite : on désigne un tel système **Domaine Réduit Représentatif (DRR)** du large faisceau de référence. Le Domaine Réduit Représentatif est conditionné par le type d'information qu'il doit restituer et présente un double-enjeu pour la résolution d'un problème macroscopique donné : le DRR retenu doit reproduire le plus fidèlement possible le comportement global du système de référence, et ceci, à partir d'un nombre de cellules de base le plus réduit possible afin d'assurer les avantages en terme de coûts numériques que représente l'homogénéisation. Ses propriétés sont les suivantes:

Propriétés

1. Le domaine réduit représente un arrangement de cylindres vérifiant des **propriétés mécaniques et géométriques identiques à celles du système de référence**.
2. Le domaine réduit représentatif doit contenir **au moins une cellule de base présentant une structure représentative fixe**. Les coefficients C_{MF} , C_{LF} et C_D sont alors estimés à partir de la solution microscopique de l'écoulement défini dans les cellules à structure fixe. Les coefficients C_{MS} et C_{LS} n'ont pas lieu d'être estimés sur de telles cellules puisque vitesse et accélération du solide y sont nulles.
3. Le domaine réduit représentatif doit contenir **au moins une cellule de base présentant une structure représentative mobile**. Les coefficients C_{MS} et C_{LS} sont alors estimés à

partir de la solution microscopique de l'écoulement définie dans les cellules avec structures mobiles.

4. Pour assurer la prise en compte de l'**effet du confinement** sur l'écoulement, il convient de résoudre le problème microscopique sur un domaine réduit restituant la présence des voisins immédiats aux structures représentatives fixes et mobiles.
5. Les frontières du domaine réduit sont définies comme des **conditions numériques périodiques**, permettant de simuler un domaine *infini*.

Tout domaine réduit considéré dans est constitué d'au moins deux cellules de base et l'étape de régression linéaire sur la force hydrodynamique (paragraphe 2.3.1) est décrite dans ce cadre.

RLM pour un Domaine Réduit Représentatif

La solution numérique à l'échelle microscopique d'une cellule de base permet de calculer avec précision: les efforts hydrodynamiques $\tilde{\mathbf{F}}$ à l'interface fluide-cylindre à partir de l'équation (2.15), la vitesse cellulaire fluide $\tilde{\mathbf{V}}_f$ à partir de l'équation (2.16) et la vitesse cellulaire solide $\tilde{\mathbf{V}}_s$ à partir de l'équation (2.17). Pour un DRR constitué d'au moins deux cellules de base, l'une fixe l'autre mobile, l'**Étape 2** de régression linéaire de la force $\tilde{\mathbf{F}}$ se réalise en deux temps successifs :

- **Étape 2.1** : Les coefficients \mathbf{C}_{MF} , \mathbf{C}_{LF} et \mathbf{C}_D sont déterminés à partir de la régression linéaire multiple de la force hydrodynamique $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_{fix}, t)$ exercée sur l'ensemble des structures fixes du domaine réduit représentatif, tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_{fix}, t) = & \rho_f \frac{\pi D^2}{4} dz (1 + \mathbf{C}_{MF}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_f}{\partial t}(\mathbf{x}_{fix}, t) \\ & + \frac{1}{2} \rho_f D dz U \mathbf{C}_{LF} (\tilde{\mathbf{V}}_f(\mathbf{x}_{fix}, t) - \mathbf{V}_\infty) + \frac{1}{2} \rho_f D \mathbf{C}_D dz |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned}$$

\mathbf{x}_{fix} localise les cellules de base du DRR à structure fixe au cours du temps.

- **Étape 2.2** : Les coefficients \mathbf{C}_{MS} et \mathbf{C}_{LS} sont déterminés à partir de la régression linéaire multiple de la force hydrodynamique $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_{mob}, t)$ exercée sur l'ensemble des cylindres mobiles du domaine réduit représentatif, tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_{mob}, t) = & \rho_f \frac{\pi D^2}{4} dz \left[(1 + \mathbf{C}_{MF}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_f}{\partial t}(\mathbf{x}_{mob}, t) - \mathbf{C}_{MS} \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_s}{\partial t}(\mathbf{x}_{mob}, t) \right] \\ & + \frac{1}{2} \rho_f D U dz \left[\mathbf{C}_{LF} (\tilde{\mathbf{V}}_f(\mathbf{x}_{mob}, t) - \mathbf{V}_\infty) - \mathbf{C}_{LS} \tilde{\mathbf{V}}_s(\mathbf{x}_{mob}, t) \right] + \frac{1}{2} \rho_f D \mathbf{C}_D dz |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned}$$

Les coefficients C_{MF} , C_{LF} et C_D sont ceux estimés à l'Étape 2.1. \mathbf{x}_{mob} localise les cellules de base à structure mobile au cours du temps.

2.4 Sensibilité aux paramètres adimensionnels

La valeur prise par chaque coefficient traduit la contribution respective des différents effets mis en jeu dans le chargement hydrodynamique exercé sur une structure donnée:

- C_{MF} pour l'effet de masse ajouté dû à l'accélération de l'écoulement instationnaire,
- C_{MS} pour la correction de l'effet de masse ajoutée si le cylindre est mobile,
- C_{LF} pour l'effet inertiel à l'origine du déphasage entre la charge et la réponse dynamique,
- C_{LS} pour la correction de l'effet inertiel si le cylindre est mobile,
- C_D pour la traînée stationnaire.

Les effets majeurs impliqués dans un chargement hydrodynamique sont gouvernés par le régime dynamique du système tubulaire considéré ; et un régime dynamique se caractérise en pratique par l'ensemble des valeurs prises par des nombres adimensionnels associé au problème (Khalak & Williamson [32, 34, 33, 35], Sumer & Fredsøe [67], Hover [27], Bearman [4], Païdoussis [47]). De plus, le nombre de structures mobiles (ou de degré de liberté) a un impact avéré sur la stabilité vibratoire des faisceaux soumis à un écoulement incident (*cf.* Price [50] ou élément de rappel dans l'*Introduction générale*). Dans la suite, les coefficients hydrodynamiques sont estimés pour différents nombres de Reynolds Re et différentes vitesse réduite U_r .

Domaine réduit représentatif

Considérons un domaine réduit constitué de deux cylindres entiers représentatifs (Figure 2.7), l'un fixe et l'autre mobile. Les fractions de cylindre sont fixes et ont pour seul objet de restituer le confinement de l'écoulement du large faisceau de référence. Les cylindres sont, à tout instant, soumis à un courant incident et stationnaire de vitesse incidente U_∞ . Les mouvements de la structure mobile sont enclenchés par un signal de force initial. Les paramètres mécaniques et géométriques utilisés sont regroupés dans la Table 2.1.

D (mm)	$U_\infty (m.s^{-1})$	$\rho_f (kg.m^{-3})$	$\rho_s (kg.m^{-3})$	m^*	P^*
10,0	$1,0.10^{-2}$	$1,0.10^3$	$3,0.10^3$	3,0	1,4

TABLE 2.1 – Paramètres dimensionnels du DRR

Les paramètres de simulation numérique ne sont pas introduits ici et font l'objet d'une description détaillée dans le *Chapitre 3* pour la méthode de résolution, ainsi que dans le *Chapitre 4* pour la mise en donnée d'une telle simulation. Néanmoins, il convient de préciser que les frontières fluides du DRR sont assignées de conditions aux limites **périodiques**.

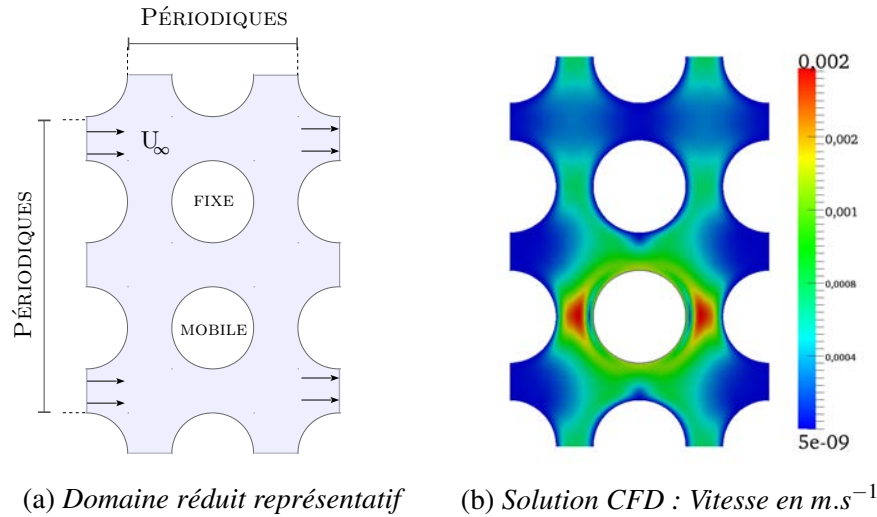


FIGURE 2.7 – *Domaine réduit représentatif (a) et de la solution de l'écoulement à l'échelle microscopique à partir d'une simulation numérique CFD (b)*

Effet du nombre de Reynolds Re

Les coefficients hydrodynamiques C_{MF} , C_{MS} , C_{LF} et C_{LS} sont estimés pour différents Re modulés avec la viscosité cinématique ν du fluide : leurs évolutions suivant Re sont reportées à la Figure 2.8. La composante de la force linéaire à C_D dépend de U_∞ qui est invariante, et ne présente pas d'évolution en fonction de Re .

Effet de la vitesse réduite U_r

Les coefficients hydrodynamiques C_{MF} , C_{MS} , C_{LF} et C_{LS} sont estimés pour différents U_r modulés avec la fréquence propre f_s de la structure mobile : leurs évolutions suivant U_r sont reportées à la Figure 2.9. La composante de la force linéaire à C_D dépend de U_∞ qui est invariant et ne présente donc pas d'évolution en fonction de U_r .

Capacités prédictives

Les solutions numériques de l'écoulement microscopique obtenues pour différents régimes dynamiques mettent en évidence la sensibilité des coefficients hydrodynamiques aux nombres adimensionnels caractérisant un faisceau tubulaire donné : une estimation peut donc s'avérer nécessaire pour chaque régime dynamique gouvernant le système d'étude.

Il est néanmoins possible d'envisager la formulation de lois d'évolution entre coefficients et nombres adimensionnels à l'aide d'une étude plus approfondie de cette dépendance.

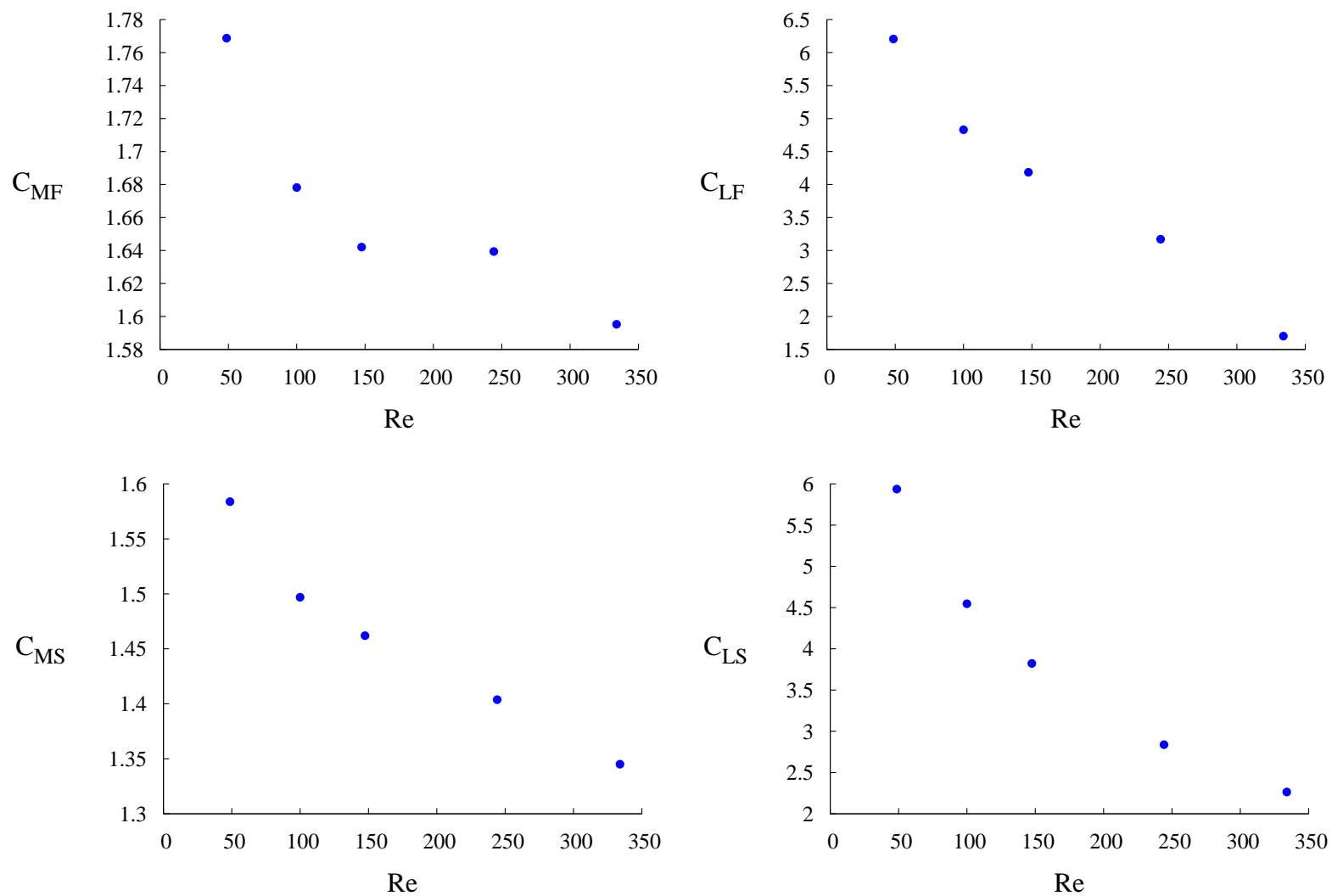


FIGURE 2.8 – Évolutions des coefficients hydrodynamiques C_{MF} , C_{LF} , C_{MS} et C_{LS} en fonction du nombre de Reynolds Re

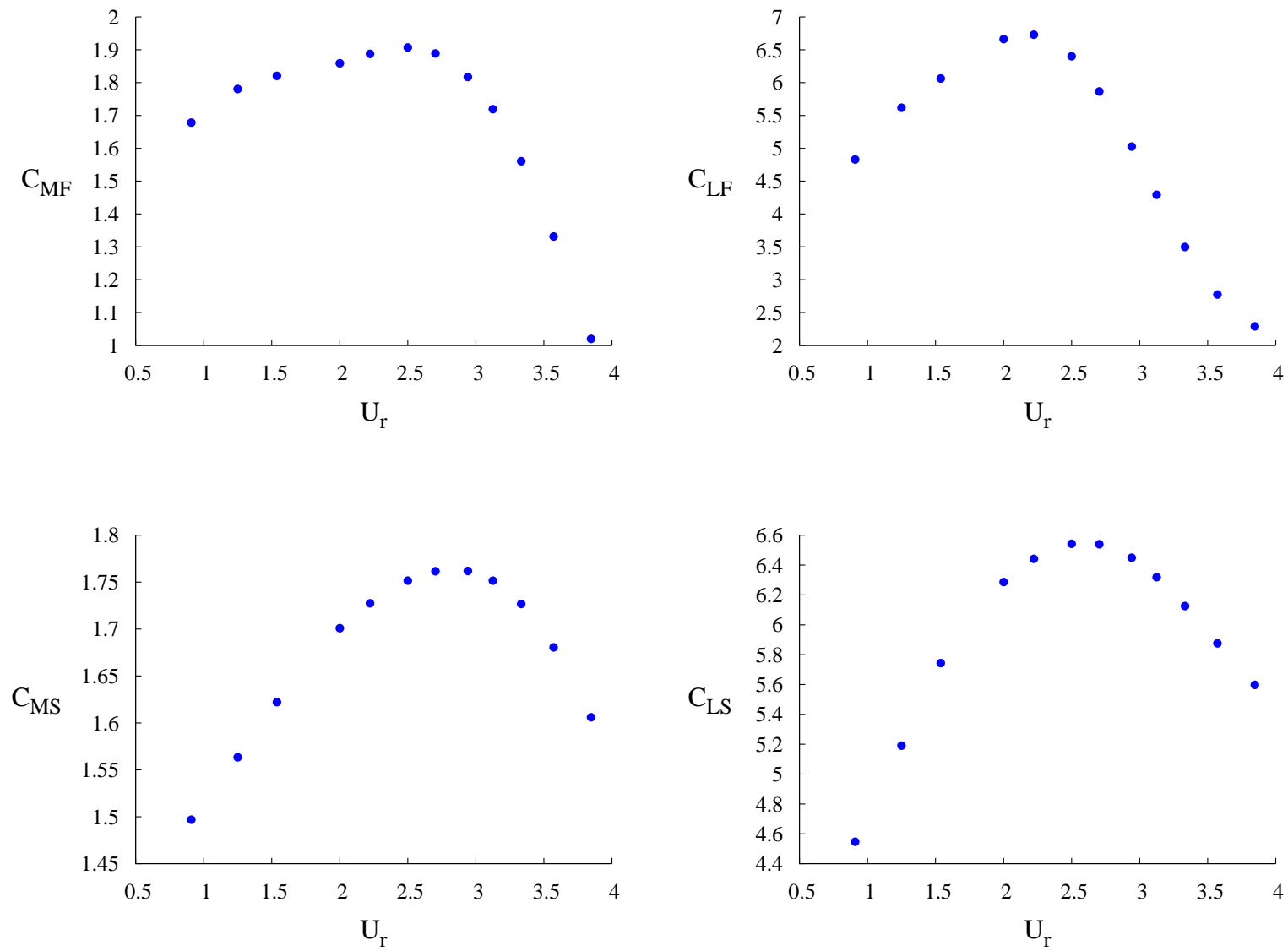


FIGURE 2.9 – Évolutions des coefficients hydrodynamiques C_{MF} , C_{LF} , C_{MS} et C_{LS} en fonction de la vitesse réduite U_r

2.5 Représentativité des coefficients

Dans la suite, on évalue quantitativement si un système réduit constitué d'un petit nombre de structures est en mesure de reproduire les charges hydrodynamiques dans un système de référence présentant de nombreux degrés de liberté. On se place dans le cadre d'un régime vibratoire amorti au cours du temps.

Configuration du système tubulaire de référence

PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES On simule numériquement les réponses hydrodynamiques et vibratoires de faisceaux constitués de 361 cylindres disposés suivant un pas carré. Les configurations considérées présentent deux zones distinctes (Figure 2.10) :

- une **zone mobile** localisée au centre du faisceau et constituée de 81 cylindres mobiles. L'action d'un bref signal de force met en mouvement chacune de ces structures initialement à l'équilibre (ou au repos). Suite à cette sollicitation initiale, chaque cylindre est libre de se déplacer individuellement.
- une **zone fixe** en périphérie de la zone mobile est constituée des 280 autres cylindres du faisceau, tous maintenus fixes. Dans cette zone, seuls les champs hydrodynamiques moyens sont observés.

La Figure 2.10 présente le système de numérotation retenu pour l'identification des différentes cellules de base et/ou structures du large faisceau et la Table 6.1 en regroupe les propriétés géométriques et mécaniques utilisées.

D (mm)	f_s (Hz)	U ($m.s^{-1}$)	v ($m^2.s^{-1}$)	ρ_f ($kg.m^{-3}$)	ρ_s ($kg.m^{-3}$)	m^*	P^*
10,0	1,1	$1,1.10^{-2}$	$1,0.10^{-6}$	$1,0.10^3$	$3,0.10^3$	3,0	1,4

TABLE 2.2 – *Données géométriques et mécaniques du domaine matériel*

DYNAMIQUE DE RÉFÉRENCE Le faisceau de grande dimension est immergé dans un écoulement initialement au repos, soit $U_\infty = |\mathbf{v}_\infty| = 0$. Chaque structure mobile du système est gouvernée par un comportement d'oscillateur harmonique *non-amorti dans le vide*, à un degré de liberté. Les viscosité dynamique et densité du fluide sont suffisamment importantes pour impacter la dynamique des cylindres. Pour l'ensemble des paramètres adimensionnels caractérisant le système, ce dernier retrouve inconditionnellement son état d'équilibre initial.

PARAMÈTRES NUMÉRIQUES Les paramètres de résolution numériques ne sont pas introduits ici et font l'objet d'une description détaillée dans le *Chapitre 3* pour la méthode de résolution, ainsi que dans le *Chapitre 4* pour la mise en donnée de la simulation.

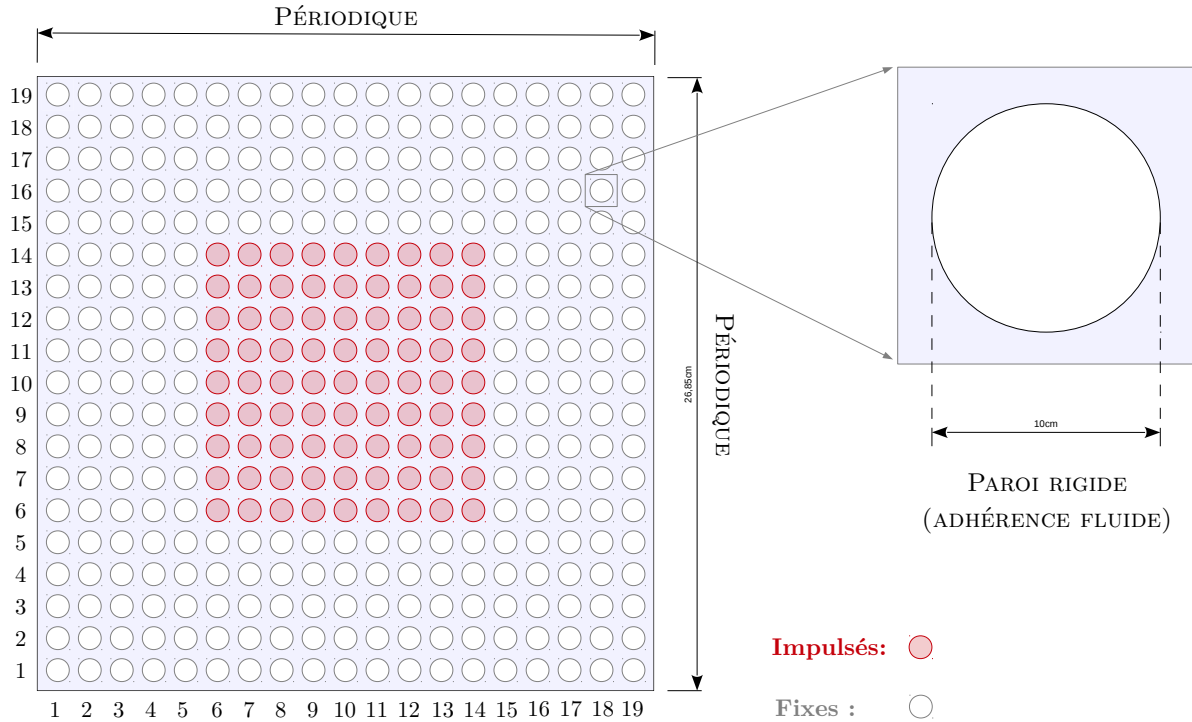


FIGURE 2.10 – **Faisceau de référence et système de numérotation des cellules de base** : Le faisceau est constitué de 361 cylindres. Chaque cylindre est identifié par sa position $i \times j$, de la i^{me} colonne et de la j^{me} ligne, pour tout couple d'entiers $\{i; j\} \in [1; 19]^2$. A tout instant, les cylindres mobiles sont repérés par les coordonnées $\{i; j\} \in [6; 14]^2$, tandis que les cylindres maintenus fixes sont repérés par les coordonnées $\{i; j\} \in ([1; 5] \cup [15; 19])^2$.

Domaine réduit représentatif

Le domaine réduit est constitué de deux cylindres entiers représentatifs (Figure 2.7), l'un fixe et l'autre mobile. Les paramètres de résolution numérique de l'écoulement microscopique sur ce DRR sont identiques à ceux définis pour le large faisceau de référence. La solution temporelle en déplacement du cylindre mobile représentatif est confrontée aux solutions en déplacement des cylindres mobiles du large faisceau de référence. La Figure 2.11 donne un aperçu de ces solutions et confirme la similitude entre le régime vibratoire du domaine réduit et celui du large faisceau : leurs structures respectives sont toutes amorties.

Estimation des coefficients

La solution microscopique de l'écoulement du domaine réduit retenu (Figure 2.7) permet de calculer avec précision les efforts hydrodynamiques s'exerçant sur chacun des cylindres représentatifs. Les coefficients mis en jeu dans le modèle de force \mathbf{F}^* (Équation 2.15) sont estimés à partir de la procédure définie à la section 2.3.2. La taille de l'échantillon temporel retenu pour la RLM compte dix périodes d'oscillations propres, succédant strictement le signal harmonique imposée comme condition initiale. Les valeurs obtenues sont regroupées dans la Table 2.3. On

note qu'il n'y a pas lieu de déterminer un coefficient de traînée C_D pour cette configuration puisque le système n'est soumis à aucun courant incident ($\mathbf{v}_\infty = \vec{0}$).

Représentativité des coefficients

Les coefficients estimés sont confrontés à ceux issus de la solution au sein du faisceau de référence (de grande dimension). Les coefficients associés au faisceau de référence sont estimés pour chaque cellule de base comme suit : Premièrement, les coefficients \mathbf{C}_{MF} et \mathbf{C}_{LF} sont déterminés par RLM de la force hydrodynamique calculée **sur chaque cylindre fixe** ; puis, à partir de la *moyenne sur l'ensemble des cellules de base fixes* des coefficients \mathbf{C}_{MF} et \mathbf{C}_{LF} estimés, \mathbf{C}_{MS} et \mathbf{C}_{LS} sont déterminés par régression des efforts calculés **sur chaque cylindre mobile**. De même que pour le domaine réduit, la taille de l'échantillon temporel retenu pour la RLM compte dix périodes d'oscillations propres, succédant strictement au signal harmonique imposé comme condition initiale.

Les champs scalaires des coefficients \mathbf{C}_{MF} , \mathbf{C}_{LF} , \mathbf{C}_{MS} et \mathbf{C}_{LS} obtenus pour l'ensemble des cellules du large faisceau sont représentés à la Figure 2.12. Les distributions spatiales des coefficients \mathbf{C}_{MF} , \mathbf{C}_{LF} , \mathbf{C}_{MS} et \mathbf{C}_{LS} sur le faisceau de référence présentent de fortes singularités aux interfaces des régions fixes et mobiles. Ces singularités se résorbent significativement dans les régions éloignées de ces interfaces et se traduisent par une répartition relativement "homogène" des champs scalaires. Les moyennes des coefficients sur l'ensemble des cellules de base sont ainsi représentatives des valeurs qui prédominent leur champ respectif et permettent de caractériser de façon adéquate le chargement hydrodynamique exercé sur un cylindre suffisamment éloigné de l'interface fixe-mobile.

Dans la Table 2.3, on évalue les écarts entre les coefficients moyennés sur l'ensemble des cellules du faisceau de référence et ceux issus de l'estimation à partir domaine réduit représentatif. Ces derniers sont dans l'ensemble inférieurs à 14% et représentent un résultat encourageant sur la capacité d'un domaine réduit à représenter les efforts globaux de nature inertielle survenant au sein d'un faisceau de grande dimension.

	\mathbf{C}_{MF}	\mathbf{C}_{LF}	\mathbf{C}_{MS}	\mathbf{C}_{LS}
Référence	1.46	4.70	1.41	5.13
DRR	1.65	5.08	1.42	4.88
écart (%)	13.01	8.09	0.71	4.9

TABLE 2.3 – Comparaison entre les coefficients issus du faisceau de référence et du DRR

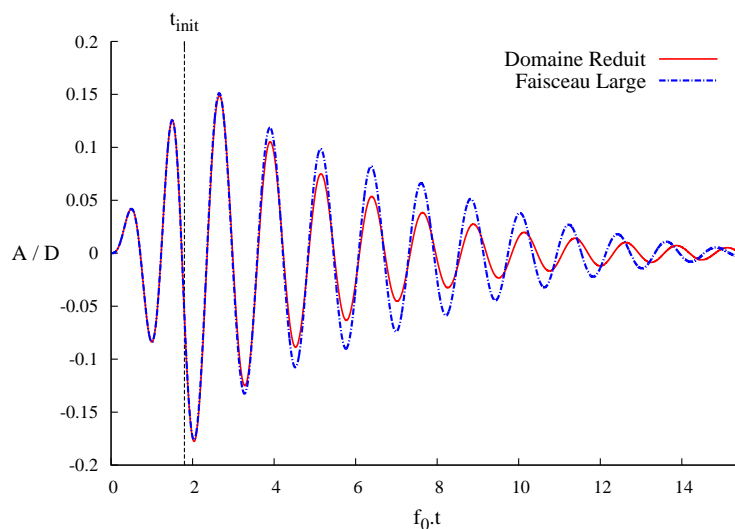


FIGURE 2.11 – Amplitude de déplacement adimensionnelle du DRR confrontée à celle du cylindre n° 10 x 10 (central) du large faisceau de référence

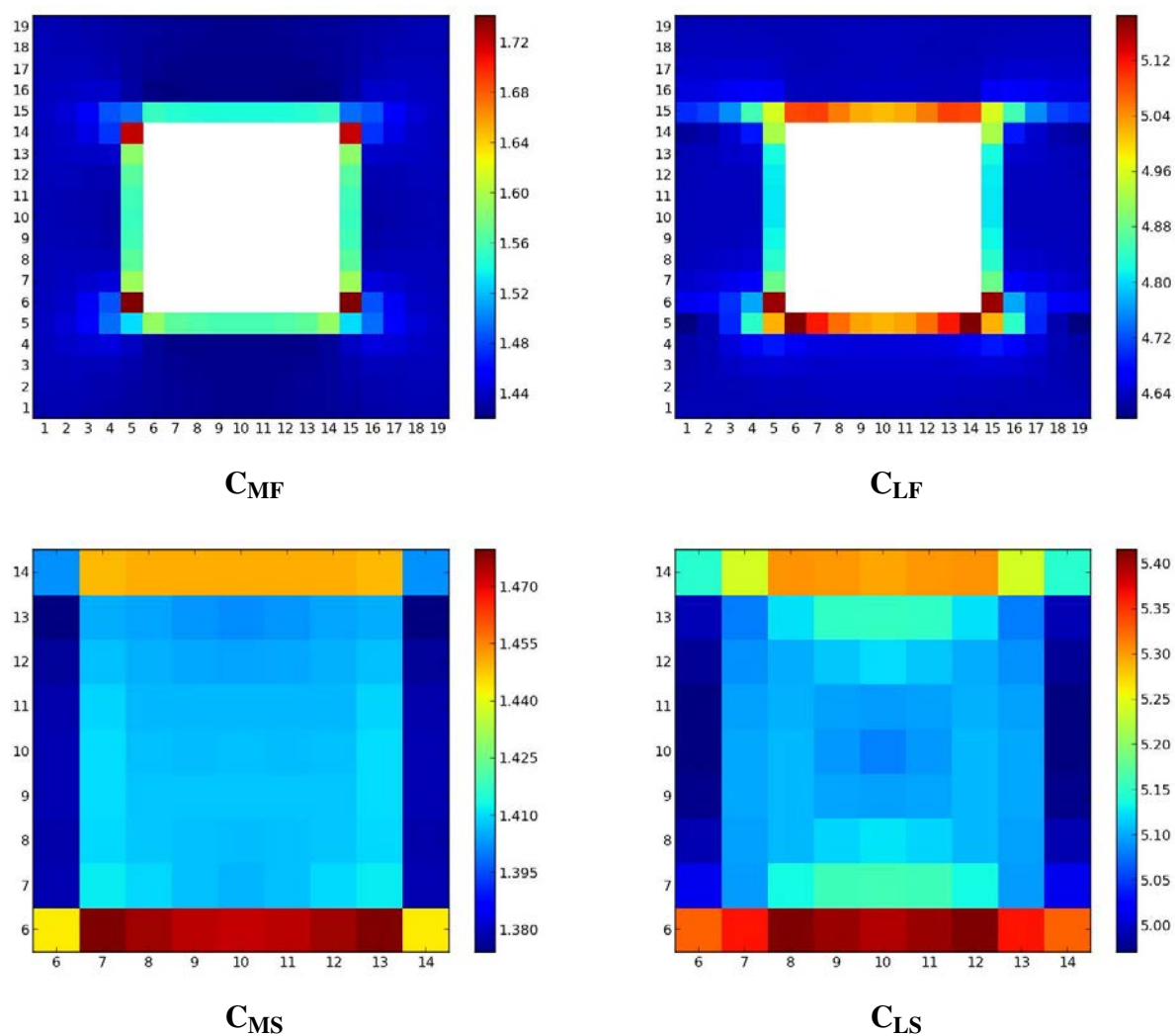


FIGURE 2.12 – Distribution spatiale des coefficients C_{MF} , C_{LF} , C_{MS} et C_{LS}

Conclusion partielle

Le terme force hydrodynamique a été exprimé en fonction des champs de vitesse moyenne fluide et solide, et représente, sous cette forme, une loi de fermeture du problème macroscopique. L'ensemble des coefficients inconnus sont déterminés à partir de la solution des champs microscopiques obtenus par simulation numérique de l'IFS sur un domaine de taille réduite.

En régime vibratoire amorti, un système constitué de deux structures fournit des coefficients présentant un accord satisfaisant avec ceux obtenus à partir du large faisceau de référence. La représentativité du domaine réduit, soit des coefficients hydrodynamiques, traduit ainsi la pertinence de la méthode de fermeture proposée. La définition du domaine réduit n'est pas figée, et le nombre de structures qui le constitue doit s'adapter au comportement dynamique du système de référence (voir perspectives de l'étude au *Chapitre 5*).

Le problème macroscopique peut désormais être résolu ; la méthode numérique adoptée est présentée au chapitre suivant.

Chapitre 3

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME MACROSCOPIQUE

Sommaire

3.1	Algorithme de base dans <i>Code_Saturne</i>	71
3.2	Variables surfaciques macroscopiques	76
3.3	Algorithme du problème homogénéisé	79
3.4	Traitement numérique des singularités macroscopiques	82
3.4.1	Estimation du gradient au voisinage de singularités	83
3.4.2	Résolution en maillage par cellule de base	87

3.1 Algorithme de base dans *Code_Saturne*

Code_Saturne est un logiciel *open source*¹ de calcul en dynamique des fluides développé par EDF R&D. Il est dédié à la simulation numérique des écoulements monophasiques, avec la possibilité de tenir compte des phénomènes de dilatation, de la turbulence ou des transferts de chaleur. *Code_Saturne* est basé sur une discrétisation numérique en volumes finis co-localisés : toute variable est définie au centre des volumes de contrôles. La discrétisation en temps peut être d'ordre 1 avec le schéma *Euler implicite*, ou d'ordre 2 avec le schéma *Crank-Nicolson*, et la discrétisation spatiale peut être d'ordre 1 avec un schéma de type *Upwind* ou d'ordre 2 avec un schéma centré.

La méthode des volumes finis est décrite sur la base d'une discrétisation en temps avec le schéma *Euler implicite* d'ordre 1. Les variables sont supposées connues au temps t^n et sont calculées au temps t^{n+1} . A chaque pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ la vitesse et la pression sont résolues par une méthode à pas fractionnaire, ou encore **méthode de prédiction-correction**, qui se présente en deux étapes :

- une étape de prédiction au cours de laquelle l'équation de quantité de mouvement est résolue pour déterminer une vitesse prédite \mathbf{v}^* . A cette étape, la pression est explicite.
- une étape de correction au cours de laquelle la vitesse prédite \mathbf{v}^* est actualisée afin obtenir la vitesse corrigée \mathbf{v}^{n+1} correspondante.

Équations

Les équations du module de base de *Code_Saturne* sont vérifiées dans le cadre d'un écoulement monophasique, laminaire, dont les effets de gravité et de dilatation volumique sont négligés. Ce système d'équations est écrit sous sa forme conservative, la plus adaptée pour procéder à la discrétisation spatiale en volumes finis.

Conservation de la masse

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \Gamma_m \quad (3.1)$$

\mathbf{v} est le champ de vitesse à résoudre, ρ la masse volumique de l'écoulement et Γ_m un terme source ou puit de masse.

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes (\rho \mathbf{v})) = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} - \mathbf{v}_{inj} \Gamma_m$$

1. en accès libre et gratuit

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \\ \bar{\bar{\tau}} = 2\mu \bar{\bar{D}} - \frac{2}{3}\mu \text{tr}(\bar{\bar{D}})\bar{\bar{I}} \\ \bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v} + {}^t\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v} \right) \end{array} \right.$$

$\bar{\bar{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, $\bar{\bar{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses, $\bar{\bar{D}}$ le tenseur taux de déformation, p le champ de pression à résoudre, \mathbf{v}_{inj} la vitesse d'injection de masse et μ la viscosité dynamique de l'écoulement. En tenant compte l'équation (3.1) de conservation de la masse, il vient:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes (\rho \mathbf{v})) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu \left(\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v} + {}^t\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v} \right) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}_{inj} \Gamma_{\mathbf{m}} \quad (3.2)$$

Méthode de prédiction-correction

Étape de prédiction

La vitesse prédite \mathbf{v}^* est calculée à partir de l'équation suivante discrétisée en temps :

$$\rho \left(\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{v}^* \otimes (\rho \mathbf{v}^n)) = -\nabla p^n + \nabla \cdot \mu \left(\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v}^* + {}^t\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v}^n \right) - \frac{2}{3} [\nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{v})]^n - (\mathbf{v}_{inj} \Gamma_{\mathbf{m}})^n$$

Cette équation de convection-diffusion est résolue sous la forme:

$$f_{imp} (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n) + \nabla \cdot (\mathbf{v}^* \otimes (\rho \mathbf{v}^n)) - \nabla \cdot \mu \bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v}^* = f_{exp}, \quad (3.3)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{imp} = \frac{\rho}{\Delta t} \\ f_{exp} = -\nabla p^n + \nabla \cdot \mu {}^t\bar{\bar{\nabla}}\mathbf{v}^n - \frac{2}{3} [\nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{v})]^n - (\mathbf{v}_{inj} \Gamma_{\mathbf{m}})^n \end{array} \right. \quad (3.4)$$

DISCRÉTISATION SPATIALE DU DOMAINE Le domaine entier est décomposé en **ncel** volumes finis nommés Ω_i , pour $1 \leq i \leq \text{ncel}$. $S_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ est la face commune entre les volumes Ω_i et Ω_j et $S_{bik} = (\gamma_{b_k} \cap \partial\Omega_i)$, la face commune entre la k-ième face de bord du domaine Ω et le volume Ω_i . La figure 3.1 représente des volumes Ω_i et Ω_j .

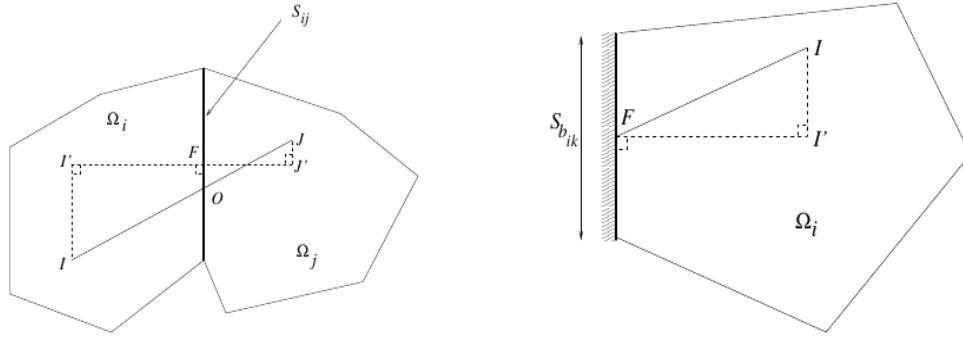


FIGURE 3.1 – Volumes finis internes (à gauche) et au bord du domaine (à droite)

Toute variable est considérée comme homogène sur Ω_i et se définit au centre de ce dernier.

TERME CONVECTIF Le théorème de la divergence est appliqué à l'intégration du terme convectif sur le volume de contrôle Ω_i :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\mathbf{v}^* \otimes (\rho \mathbf{v}^n)) dV &= \int_{\partial \Omega_i} ((\rho \mathbf{v}^n) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}^* dS \\ &= \sum_{(\partial \Omega_i \cap \partial \Omega_j)_j} [(\rho \mathbf{v}^n)_{ij} \cdot S_{ij}] \mathbf{v}_{ij}^* + \sum_{\gamma_{b_k}(k)} [(\rho \mathbf{v}^n)_{b_{ik}} \cdot S_{b_{ik}}] \mathbf{v}_{b_{ik}}^* \quad (3.5) \end{aligned}$$

La nature des conditions au limites imposées sur les faces de bord γ_{b_k} conditionne les valeurs prises par $\mathbf{v}_{b_{ik}}^n$ et $\mathbf{v}_{b_{ik}}^*$. Les valeurs discrètes des vitesses \mathbf{v}_{ij}^n et \mathbf{v}_{ij}^* aux faces S_{ij} sont déterminées selon le choix du schéma numérique. Pour le flux convectif, il existe trois schémas possible dans *Code_Saturne* :

1. UPWIND d'ordre 1

$$\mathbf{v}_{ij}^n = \begin{cases} \mathbf{v}_I^n & \text{if } (\rho \mathbf{v}^n)_{ij} \cdot S_{ij} \geq 0 \\ \mathbf{v}_J^n & \text{if } (\rho \mathbf{v}^n)_{ij} \cdot S_{ij} < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

2. UPWIND linéaire d'ordre 2

$$\mathbf{v}_{ij}^n = \begin{cases} \mathbf{v}_I^n + \mathbf{IF} \cdot (\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}^n)_I & \text{if } (\rho \mathbf{v}^n)_{ij} \cdot S_{ij} \geq 0 \\ \mathbf{v}_J^{n+1} + \mathbf{JF} \cdot (\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}^{n+1})_J & \text{if } (\rho \mathbf{v}^n)_{ij} \cdot S_{ij} < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

3. Schéma CENTRÉ d'ordre 2

$$\mathbf{v}_{ij}^n = \alpha_{ij} \mathbf{v}_I^n + (1 - \alpha_{ij}) \mathbf{v}_J^n + \frac{1}{2} \left[(\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}^n)_I + (\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}^n)_J \right] \cdot \mathbf{OF} \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = \frac{FJ'}{I'J'} \quad (3.8)$$

TERME DIFFUSIF Le théorème de la divergence est appliqué à l'intégration du terme diffusif sur le volume de contrôle Ω_i :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mu \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}^* dV &= \int_{\partial\Omega_i} (\mu \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \sum_{(\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)_j} \mu_{ij} \frac{\mathbf{v}_{j'}^* - \mathbf{v}_{i'}^*}{l' j'} S_{ij} + \sum_{(\mathcal{V}_k \cap \partial\Omega_i)_k} \mu_{b_{ik}} \frac{\mathbf{v}_{b_{ik}}^* - \mathbf{v}_{i'}^*}{l' j'} S_{b_{ik}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec

$$\mathbf{v}_{j'}^n = \mathbf{v}_j^n + (\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}^n)_j \cdot \mathbf{J} \mathbf{J}'$$

Aux frontières du domaine, le coefficient de viscosité $\mu_{b_{ik}}$ vérifie:

$$\mu_{b_{ik}} = \mu_I$$

A l'interface S_{ij} de deux volumes Ω_i et Ω_j , le coefficient de viscosité μ_{ik} peut se calculer suivant deux types de moyennes différents :

1. Arithmétique:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}(\mu_I + \mu_J)$$

2. Harmonique:

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_I \mu_J}{\alpha_{ij} \mu_I + (1 - \alpha_{ij}) \mu_J}$$

Étape de correction

L'étape de correction permet de calculer la pression p^{n+1} et la vitesse \mathbf{v}^{n+1} conformément au système suivant:

$$\frac{(\rho \mathbf{v})^{n+1} - (\rho \mathbf{v})^*}{\Delta t} = -\nabla \delta p^{n+1} \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})^{n+1} = \Gamma_{\mathbf{m}}^n, \quad (3.11)$$

avec l'incrément de pression défini par :

$$\delta p^{n+1} = p^{n+1} - p^n \quad (3.12)$$

La divergence du taux de variation de la quantité de mouvement entraîne :

$$\Gamma_{\mathbf{m}}^n - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})^* = \nabla \cdot (-\Delta t \nabla \delta p^{n+1})$$

Le système suivant est à résoudre :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\Delta t \nabla \delta p^{n+1}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})^* - \Gamma^n \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \delta p^{n+1} \end{cases} \quad (3.13)$$

LAPLACIEN DE PRESSION L'intégrale volumique sur Ω_i du membre gauche de l'équation de poisson entraîne via le théorème de la divergence :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\Delta t \nabla \delta p^{n+1}) dV &= \int_{\partial \Omega_i} (\Delta t \nabla \delta p^{n+1}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \sum_{(\partial \Omega_i \cap \partial \Omega_j)_j} \Delta t_{ij} \frac{\delta p_{j'}^{n+1} - \delta p_{I'}^{n+1}}{I' J'} S_{ij} + \sum_{k \in \gamma_k(k)} \Delta t_{bik} \frac{\delta p_{bik}^{n+1} - \delta p_{I'}^{n+1}}{I' J'} S_{bik} \end{aligned}$$

Aux frontières du domaine le pas de temps Δt_{bik} prend la valeur suivante :

$$\Delta t_{bik} = \Delta t_I$$

A l'interface S_{ij} de deux volumes Ω_i et Ω_j , le pas de temps Δt_{ik} peut se calculer suivant deux types de moyennes différents :

1. Arithmétique:

$$\Delta t_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta t_I + \Delta t_J)$$

2. Harmonique:

$$\Delta t_{ij} = \frac{\Delta t_I \Delta t_J}{\alpha_{ij} \Delta t_I + (1 - \alpha_{ij}) \Delta t_J}$$

FLUX DE MASSE Le théorème de la divergence appliqué à l'intégrale volumique du premier membre de droite de l'équation de poisson entraîne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})^* dV &= \int_{\partial \Omega_i} (\rho \mathbf{v})^* \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \sum_{(\partial \Omega_i \cap \partial \Omega_j)_j} [(\rho \mathbf{v})_{ij}^* \cdot S_{ij}] + \sum_{k \in \gamma_k(k)} [(\rho \mathbf{v})_{bik}^* \cdot S_{bik}] \end{aligned}$$

A l'interface S_{ij} de deux volumes Ω_i et Ω_j , la quantité de mouvement $(\rho \mathbf{v})^*$ est calculée suivant le schéma centré d'ordre 2 suivant :

$$(\rho \mathbf{v})_{ij}^* = \alpha_{ij} (\rho \mathbf{v})_I^* + (1 - \alpha_{ij}) (\rho \mathbf{v})_J^* + \frac{1}{2} \left[(\bar{\bar{\nabla}}(\rho \mathbf{v})^*)_I + (\bar{\bar{\nabla}}(\rho \mathbf{v})^*)_J \right] \cdot \mathbf{OF}$$

3.2 Variables surfaciques macroscopiques

L'homogénéisation de l'écoulement en interaction avec des structures mobiles est dérivée au *Chapitre 1* et permet d'aboutir au système d'équations rappelé ci-dessous:

- BILAN DE LA MASSE

$$\nabla \cdot (\phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\phi_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s) = 0 \quad (3.14)$$

- BILAN DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_f \rho_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f^f} \otimes \phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) &= -\nabla (\varepsilon_f \overline{p_f^f}) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f^f}} + {}^t \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f^f}}) \\ &- \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f^f} \otimes \phi_s \langle \mathbf{v}_s \rangle^s) - \frac{\mathbf{F}}{|\Omega|} \end{aligned} \quad (3.15)$$

- DÉPLACEMENT DE Ω_s DANS Ω

$$\overline{\overline{M}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \overline{\overline{K}} \mathbf{u}_s = \mathbf{F} \quad (3.16)$$

Pour toute variable φ définie dans un volume de contrôle - ou maille - Ω_i , $\overline{\varphi}^f$ représente le champ moyen de φ sur la frontière $\partial\Omega_i$ de Ω_i et $\langle \varphi \rangle^f$ représente le champ moyen de φ dans le volume Ω_i . Dans le cadre d'une résolution numérique par volumes finis co-localisés, les intégrales des quantités $\overline{\varphi}^f$ et $\langle \varphi \rangle^f$ sont supposées égales sur la frontière $\partial\Omega_i$ d'une maille Ω_i ; soit:

$$\int_{\partial\Omega_i} \langle \varphi \rangle^f ds = \int_{\partial\Omega_i} \overline{\varphi}^f ds \quad (3.17)$$

Dans le système d'équations macroscopique à résoudre, les moyennes surfaciques interviennent dans les termes convectif et diffusif du bilan de quantité de mouvement. L'intégration de ces termes sur un volume de contrôle Ω_i entraîne:

– pour le FLUX CONVECTIF

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f^f} \otimes \phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) dv = \int_{\partial\Omega_i} (\rho_f \varepsilon_f \overline{\mathbf{v}_f^f} \cdot \mathbf{n}) \phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f ds = \int_{\partial\Omega_i} (\rho_f \varepsilon_f \phi_f \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \cdot \mathbf{n}) \langle \mathbf{v}_f \rangle^f ds$$

– pour le FLUX DIFFUSIF

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f^f}}) dv = \int_{\partial\Omega_i} (\varepsilon_f \mu \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f^f}} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\partial\Omega_i} (\varepsilon_f \mu \langle \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}_f^f}} \rangle^f) \cdot \mathbf{n} ds$$

En appliquant successivement le *Théorème I* (Gray et Lee [22]) de prise de moyenne sur

une cellule de base Ω puis le théorème de la divergence sur le contour fermé Γ_{fs} , il vient:

$$\langle \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_f \rangle^f = \bar{\bar{\nabla}} \langle \mathbf{v}_f \rangle^f - \int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{v}_s \otimes \mathbf{n}_s ds = \bar{\bar{\nabla}} \langle \mathbf{v}_f \rangle^f - \int_{\Omega_s} \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_s ds = \bar{\bar{\nabla}} \langle \mathbf{v}_f \rangle^f ,$$

puisque $\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_s = 0$ sur Ω . On en déduit:

$$\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{v}_f)^f dv = \int_{\partial \Omega_i} (\varepsilon_f \mu \bar{\bar{\nabla}} \langle \mathbf{v}_f \rangle^f) \cdot \mathbf{n} ds$$

Avec des volumes finis co-localisés, la résolution du problème homogénéisé dont les flux dépendent de moyennes surfaciques est équivalente à celle du même problème écrit uniquement avec des moyennes volumiques. En tenant compte du modèle retenu pour les charges hydrodynamiques \mathbf{F} (Chapitre 2), la résolution du système d'équations [(3.14), (3.15), (3.16)] est équivalente à celle du système ci-dessous:

• BILAN DE LA MASSE

$$\nabla \cdot (\phi_f \mathbf{V}_f) + \nabla \cdot (\phi_s \mathbf{V}_s) = 0 \quad (3.18)$$

• BILAN DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_f \rho_f \mathbf{V}_f) + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{V}_f \otimes \phi_f \mathbf{V}_f) &= -\nabla (\varepsilon_f P) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{V}_f + {}^t \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{V}_f) \\ &- \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{V}_f \otimes \phi_s \mathbf{V}_s) - \frac{\mathbf{F}}{|\Omega|} \end{aligned} \quad (3.19)$$

• DÉPLACEMENT DE Ω_s DANS Ω

$$\bar{\bar{M}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \bar{\bar{K}} \mathbf{u}_s = \mathbf{F} \quad (3.20)$$

• CHARGES HYDRODYNAMIQUES

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \rho_f dz \frac{\pi D^2}{4} \left[(1 + \mathbf{C}_{MF}) \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} - \mathbf{C}_{MS} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \rho_f dz D U [\mathbf{C}_{LF} (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_\infty) - \mathbf{C}_{LS} \mathbf{V}_s] + \frac{1}{2} \rho_f dz D \mathbf{C}_D |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour alléger l'écriture du problème les notations suivantes sont adoptées:

$$\langle p_f \rangle^f \longrightarrow P \quad , \quad \langle \mathbf{v}_f \rangle^f \longrightarrow \mathbf{V}_f \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{v}_s \rangle^s \longrightarrow \mathbf{V}_s$$

Les coefficients hydrodynamiques $\mathbf{C}_{\mathbf{MF}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{MS}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{LF}}$, $\mathbf{C}_{\mathbf{LS}}$ et $\mathbf{C}_{\mathbf{D}}$ sont déterminés suivant la méthode proposée au Chapitre 3. Les paramètres mécaniques et géométriques ϕ_f , ϕ_s , ε_f , ρ_f , ρ_s , μ , \bar{M} , \bar{K} , dz , $|\Omega|$, D et U sont des données du problème.

Le problème peut être écrit sous forme réduite en introduisant les paramètres suivants :

$$\mathbf{A}_{\mathbf{MF}} = \frac{1}{|\Omega|} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} dz (1 + \mathbf{C}_{\mathbf{MF}}) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{MS}} = \frac{1}{|\Omega|} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} dz \mathbf{C}_{\mathbf{MS}} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{LF}} = \frac{1}{2|\Omega|} \rho_f D U dz \mathbf{C}_{\mathbf{LF}} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{LS}} = \frac{1}{2|\Omega|} \rho_f D U dz \mathbf{C}_{\mathbf{LS}} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{D}} = \frac{1}{2|\Omega|} \rho_f D dz \mathbf{C}_{\mathbf{D}} \quad (3.26)$$

Soit finalement:

• BILAN DE LA MASSE

$$\nabla \cdot (\phi_f \mathbf{V}_f) + \nabla \cdot (\phi_s \mathbf{V}_s) = 0 \quad (3.27)$$

• BILAN DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT

$$\begin{aligned} (\phi_f \rho_f + \mathbf{A}_{\mathbf{MF}}) \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{V}_f \otimes \phi_f \mathbf{V}_f) &= -\nabla(\varepsilon_f P) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu (\bar{\nabla} \mathbf{V}_f + {}^t \bar{\nabla} \mathbf{V}_f) \\ &- \nabla \cdot (\rho_f \varepsilon_f \mathbf{V}_f \otimes \phi_s \mathbf{V}_s) + \mathbf{A}_{\mathbf{MS}} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} \\ &- \mathbf{A}_{\mathbf{LF}} (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_\infty) + \mathbf{A}_{\mathbf{LS}} \mathbf{V}_s - \mathbf{A}_{\mathbf{D}} |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned} \quad (3.28)$$

• DÉPLACEMENT DE Ω_s DANS Ω

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{|\Omega|} + \mathbf{A}_{\mathbf{MS}} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \mathbf{A}_{\mathbf{LS}} \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + \frac{K}{|\Omega|} \mathbf{u}_s &= \mathbf{A}_{\mathbf{MF}} \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} + \mathbf{A}_{\mathbf{LF}} (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_\infty) \\ &- \mathbf{A}_{\mathbf{LS}} \mathbf{V}_s + \mathbf{A}_{\mathbf{D}} |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.3 Algorithme du problème homogénéisé

Chaque équation du système met simultanément en jeu des variables de nature fluide et solide, traduisant un couplage important. Il existe deux catégories d'algorithmes destinées à résoudre ce type de problème :

- **Les algorithmes monolithiques** permettent de résoudre l'ensemble des inconnues de nature fluide et solide simultanément, à partir d'un seul solveur, et donc, pour une échelle de temps commune aux deux phases.
- **Les algorithmes partitionnés** permettent de résoudre successivement les inconnues de nature fluide et celles de nature solide, avec des solveurs différents et pouvant faire intervenir différentes échelles de temps.

L'intérêt d'une méthode par rapport à l'autre dépend essentiellement du rapport entre les temps caractéristiques des phénomènes fluide et solide. Pour des échelles de temps fluide et solide du même ordre de grandeur, un algorithme monolithique est plus approprié et garantit un schéma de couplage stable, tandis qu'un algorithme partitionné, dans ce cas de figure, introduirait un décalage en temps non-souhaitable. Pour des échelles de temps significativement différentes, un algorithme partitionné permet d'adapter la discrétisation temporelle à chaque type de phase et ainsi de réaliser un gain considérable en temps et ressources de calcul.

Le système d'équations à résoudre ici présente de nombreuses similitudes avec les équations de Navier-Stokes. Il est possible de considérer les équations (3.27) et (3.28) respectivement comme les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement d'un écoulement incompressible, en présence de termes *correctifs* ou *sources* permettant de prendre en compte les effets dynamiques des structures en mouvement. De plus, l'équation (3.29) peut être considérée comme celle vérifiée par un oscillateur harmonique, en présence d'un terme correctif traduisant les effets dynamiques de l'écoulement sur la structure considérée. Le système d'équations homogénéisé est donc résolu avec un algorithme de type partitionné, faisant intervenir deux solveurs différents :

1. Un **solveur fluide** est utilisé pour la résolution du couple d'équations (3.27) et (3.28) et permet de calculer les variables \mathbf{V}_f et P au cours du temps. Il est basé sur l'algorithme du *module de base* existant dans *Code_Saturne*, faisant appel à une méthode de discrétisation temporelle à ***pas fractionnaires***, ou encore dite de ***prédiction-correction***: cet algorithme est décrit à la section 3.1 Des ajustements sont apportés à l'algorithme de *Code_Saturne* afin de le rendre conforme à la résolution du problème macroscopique : ces ajustements sont présentés dans la section suivante.
2. Un **solveur structure** est utilisé pour la résolution de l'équation (3.29) et permet de calculer la variable \mathbf{u}_s au cours du temps. Ce solveur fait appel au schéma de discrétisation de *Newmark*, largement utilisé dans les algorithmes d'intégration en temps des problè-

mes en dynamique des structures. Cet algorithme est programmé dans le *module ALE* de *Code_Saturne* pour résoudre au cours du temps les déplacements d'une paroi rigide gouvernée par le modèle d'oscillateur harmonique. Le schéma de Newmark est largement décrit dans la littérature et ne fait pas l'objet d'une description supplémentaire dans ce manuscrit ; pour obtenir des détails sur cette méthode, on peut se référer par exemple à l'ouvrage de Bonnet e Attilio [9], ou encore à la documentation de *Code_Aster*, logiciel libre de calcul en mécanique des structures développé par EDF R&D [40].

Pour simplifier l'écriture du système à résoudre et mettre en évidence l'implication de chaque solveur dans l'algorithme de résolution, les quantités suivantes sont introduites :

- Terme source de masse fluide :

$$\Gamma_{\mathbf{m}} = -\nabla \cdot (\phi_s \mathbf{V}_s) \quad (3.30)$$

- Terme source de quantité de mouvement fluide :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{f}} = & -\nabla \cdot (\rho_{\mathbf{f}} \varepsilon_{\mathbf{f}} \mathbf{V}_{\mathbf{f}} \otimes \phi_{\mathbf{f}} \mathbf{V}_{\mathbf{f}}) - \nabla \cdot (\rho_{\mathbf{f}} \varepsilon_{\mathbf{f}} \mathbf{V}_{\mathbf{f}} \otimes \phi_s \mathbf{V}_s) \\ & + \mathbf{A}_{\mathbf{MS}} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} - \mathbf{A}_{\mathbf{LF}} (\mathbf{V}_{\mathbf{f}} - \mathbf{V}_{\infty}) + \mathbf{A}_{\mathbf{LS}} \mathbf{V}_s - \mathbf{A}_{\mathbf{D}} |\mathbf{v}_{\infty}| \mathbf{v}_{\infty} \end{aligned} \quad (3.31)$$

- Densité fluide effective :

$$\rho^* = \phi_{\mathbf{f}} \rho_{\mathbf{f}} + \mathbf{A}_{\mathbf{MF}} \quad (3.32)$$

- Terme source de quantité de mouvement solide :

$$\Gamma_{\mathbf{s}} = \mathbf{A}_{\mathbf{MF}} \frac{\partial \mathbf{V}_{\mathbf{f}}}{\partial t} + \mathbf{A}_{\mathbf{LF}} (\mathbf{V}_{\mathbf{f}} - \mathbf{V}_{\infty}) - \mathbf{A}_{\mathbf{LS}} \mathbf{V}_s + \mathbf{A}_{\mathbf{D}} |\mathbf{v}_{\infty}| \mathbf{v}_{\infty} \quad (3.33)$$

- Masse, raideur et amortissement effectifs, respectivement définis par :

$$M^* = \frac{\overline{\overline{M}}}{|\Omega|} + \mathbf{A}_{\mathbf{MS}}, \quad K^* = \frac{\overline{\overline{K}}}{|\Omega|} \quad \text{et} \quad C^* = \mathbf{A}_{\mathbf{LS}} \quad (3.34)$$

Pour tout volume de contrôle Ω_i tel que $1 \leq i \leq \text{ncel}$, les variables $\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^n$, P^n et $\mathbf{u}_{\mathbf{s}}^n$ sont supposées connues au temps t^n . A partir des relations ci-dessus, l'algorithme retenu pour le calcul des variables $\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^{n+1}$, P^{n+1} et $\mathbf{u}_{\mathbf{s}}^{n+1}$ au temps t^{n+1} est le suivant :

Étape 1 - Les termes sources $\Gamma_{\mathbf{m}}^n$ et $\Gamma_{\mathbf{f}}^n$ sont calculés explicitement tels que :

$$\Gamma_{\mathbf{m}}^n = \Gamma_{\mathbf{m}}^n(\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n)$$

$$\Gamma_{\mathbf{f}}^n = \Gamma_{\mathbf{f}}^n(\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^n, \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n, \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n)$$

Étape 2 - Le **solveur fluide** résout le système d'équations suivant,

$$\nabla \cdot (\phi_f \mathbf{V}_{\mathbf{f}}) = \Gamma_{\mathbf{m}} \quad (3.35)$$

$$\rho^* \frac{\partial \mathbf{V}_{\mathbf{f}}}{\partial t} = -\nabla(\varepsilon_f P) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu \left(\overline{\nabla} \mathbf{V}_{\mathbf{f}} + {}^t \overline{\nabla} \mathbf{V}_{\mathbf{f}} \right) + \Gamma_{\mathbf{f}} \quad (3.36)$$

et fournit les quantités suivantes :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^{n+1} = \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^{n+1}(\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^n, P^n, \Gamma_{\mathbf{f}}^n)$$

$$P^{n+1} = P^{n+1}(\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^n, P^n, \Gamma_{\mathbf{f}}^n)$$

Étape 3 - Le terme source $\Gamma_{\mathbf{s}}$ est calculé explicitement à partir de la solution du solveur fluide :

$$\Gamma_{\mathbf{s}}^{n+1} = \Gamma_{\mathbf{s}}^{n+1}(\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^n, \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^{n+1})$$

Étape 4 - Le **solveur solide** résout le système d'équation suivant par la méthode *Newmark*,

$$M^* \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}} + C^* \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}} + K^* \mathbf{u}_{\mathbf{s}} = \Gamma_{\mathbf{s}} \quad (3.37)$$

et fournit les quantités suivantes :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{s}}^{n+1} = \mathbf{u}_{\mathbf{s}}^{n+1}(\mathbf{u}_{\mathbf{s}}^n, \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n, \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n, \Gamma_{\mathbf{s}}^{n+1})$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^{n+1}(\mathbf{u}_{\mathbf{s}}^n, \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n, \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n, \Gamma_{\mathbf{s}}^{n+1})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^{n+1}(\mathbf{u}_{\mathbf{s}}^n, \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n, \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n, \Gamma_{\mathbf{s}}^{n+1})$$

Étape 5 - Actualisation des variables stockées au temps t^n et retour à l'Étape 1 :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{f}}^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^n, \quad P^{n+1} \rightarrow P^n, \quad \mathbf{u}_{\mathbf{s}}^{n+1} \rightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{s}}^n, \quad \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^{n+1} \rightarrow \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^{n+1} \rightarrow \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}^n$$

On remarque que le solveur fluide retenu est destiné à résoudre le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\phi_f \mathbf{V}_f) = \Gamma_m \\ \rho^* \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\nabla(\varepsilon_f P) + \nabla \cdot \varepsilon_f \mu \left(\overline{\overline{\nabla \mathbf{V}_f}} + {}^t \overline{\overline{\nabla \mathbf{V}_f}} \right) + \Gamma_f \end{cases} \quad (3.38)$$

Ce dernier présente une écriture différente de celle des équations de Navier-Stokes résolues dans le module de base de *Code_Saturne* (cf. section 3.1). Le problème macroscopique met en jeu un flux convectif supplémentaire, dépendant du champ de vitesse solide.

Pour garantir un traitement numérique similaire aux deux flux convectifs et éviter des modifications complexes du solveur fluide, on opte pour un traitement **explicite** de ces termes, et non-pas semi-implicite tel qu'il se présente dans l'algorithme d'origine.

3.4 Traitement numérique des singularités macroscopiques

Dans l'approche macroscopique proposée, chaque cellule de base Ω_i - ou *volume de contrôle* - restitue au cours du temps la vitesse \mathbf{v}_f et la pression p de l'écoulement traversant la frontière $\partial\Omega_i$, ainsi que les déplacements \mathbf{u}_s du cylindre associé à cette même cellule. Le domaine numérique retenu pour la résolution du système d'équations macroscopiques doit être constitué d'un maillage dont le taux de variation spatiale est conforme au niveau d'observation du problème. Une première alternative consisterait à représenter chaque élément de structure (ou cellule de base associée) par une seule et unique maille. De ce fait, le domaine numérique permettant de résoudre un problème macroscopique défini pour un faisceau de tubes identiques disposés suivant un pas carré serait constitué d'un ensemble de mailles carrées identiques entre-elles, de volume égal à celui d'une cellule de base.

La description spatiale de la dynamique structure au sein d'un réseau de tubes se caractérise cependant par une vision purement discrète: en effet, les déplacements de toute structure associée à une cellule de base sont gouvernés par une équation différentielle dite *ordinaire* en temps (eq. (3.37)). De ce fait, des précautions particulières doivent être prises vis à vis des schémas de discrétisation spatiale utilisés pour le calcul des termes mettant en jeu des taux de variations en espace de quantités solide (comme par exemple le terme source de masse fluide $\Gamma_m = \nabla \cdot (\phi_s \mathbf{v}_s)$; voir eq. (3.30) et eq. (3.35)). En effet, la notion de *flux*, ou transport, de quantité solide à travers les frontières d'une cellule de base n'a pas de signification physique pour le problème macroscopique tel qu'il est posé. Aussi, de fortes singularités en terme de dynamique des structures peuvent survenir au sein du domaine de calcul: en effet, si plusieurs structures subissent des chargements différents, des réponses vibratoires variées peuvent survenir au sein d'un même faisceau (par exemple, une structure mobile peut être voisine d'une autre maintenue fixe).

3.4.1 Estimation du gradient au voisinage de singularités

L'existence de singularités dans le champ des solutions de la phase solide nécessite une estimation au premier ordre des opérateurs de dérivée spatiale de la vitesse \mathbf{v}_s . Le calcul numérique des dérivées spatiales intervenant dans le problème macroscopique fait appel aux schémas existants dans *Code_Saturne*. Le calcul du gradient d'un scalaire b , nommé \mathbf{G}_i , au centre d'un volume de contrôle Ω_i permet d'illustrer la méthode de discrétisation retenue pour l'estimation des dérivées spatiales. Par définition, on note :

$$\mathbf{G}_i = (\nabla b)_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \nabla b \, dv \quad (3.39)$$

Trois méthodes sont proposées dans *Code_Saturne* pour calculer \mathbf{G}_i :

- **Méthode de reconstruction pour les maillages non-orthogonaux** : elle utilise un développement limité d'ordre 1 en espace sur la variable b , obtenu à partir de la valeur de b et de sa dérivée partielle au centre du volume de contrôle. Cette méthode est robuste et consistante pour les maillages non-orthogonaux, mais beaucoup plus lente que les autres méthodes proposées.
- **Méthode de minimisation par moindres carrés** : elle utilise une estimation des composantes de \mathbf{G}_i aux faces, obtenue à partir des valeurs de la fonction au centre des cellules voisines. Cette méthode est plus rapide que la précédente, mais présente l'inconvénient d'être moins robuste.
- **Méthode sans reconstruction** : elle utilise un développement limité d'ordre 0 en espace sur la variable b pour l'estimation de \mathbf{G}_i . Cette méthode n'est consistante que sur des maillages orthogonaux.

Dans le cadre de cette thèse, tout problème macroscopique est résolu à partir d'un maillage hexaédrique conforme. La répartition des mailles est déterminée par l'arrangement périodique et orthogonal des cellules de base du faisceau considéré. Il est donc suffisant d'opter pour la méthode sans reconstruction pour le calcul de l'opérateur de gradient. Le détail des méthodes de reconstruction des non-orthogonalités et de minimisation par moindres carrés ne sont pas détaillées dans ce manuscrit: on peut se référer au Guide Théorique de *Code_Saturne* [41].

Dans la suite, la méthode sans reconstruction retenue pour l'estimation du gradient G_i est décrite afin d'évaluer sa capacité à prendre en compte les singularités spatiales rencontrées dans le champ des solutions de la phase solide.

Gradient sans reconstruction

Dans cette section, la cellule Ω_i est considérée comme localisée strictement à l'intérieur du domaine de calcul. On s'intéresse ici au traitement des singularités localisées à l'intérieur du domaine de calcul, et pour cette raison, nous n'aborderons pas ici le traitement des conditions

aux limites dans le calcul de G_i (voir Guide Théorique de *Code_Saturne* [41]). Tout volume Ω_j , tel que $j \in \text{Vois}(i)$, est considérée comme voisin immédiat de Ω_i .

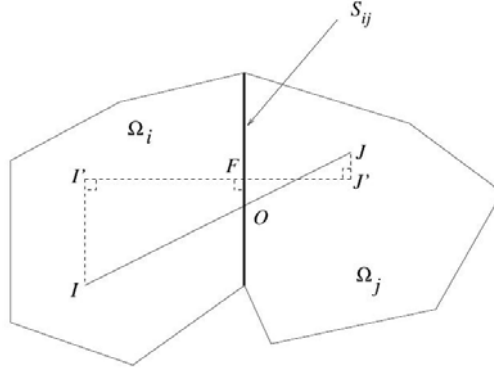


FIGURE 3.2 – Représentation de volume de contrôle internes (à gauche) et au bord du domaine (à droite)

Le gradient \mathbf{G}_i de la fonction scalaire b est calculé au centre de la cellule Ω_i de volume $|\Omega_i|$. b_{ij} représente la valeur estimée de la variable b à la face interne S_{ij} de vecteur normal associé \mathbf{n}_{ij} . En tenant compte de la définition du gradient G_i fournie par l'équation 3.39 et en appliquant le théorème de la divergence à l'intégrale volumique, on obtient :

$$\mathbf{G}_i = (\nabla b)_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \nabla b \, dv = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\partial\Omega_i} b \, ds$$

Soit,

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} b_{ij} S_{ij} \mathbf{n}_{ij} \quad (3.40)$$

Les valeurs aux faces sont obtenues comme suit :

$$b_{ij} = \alpha_{ij} b_i + (1 - \alpha_{ij}) b_j, \quad (3.41)$$

avec

$$\alpha_{ij} = \frac{\overline{FJ'}}{\overline{I'J'}} \quad (3.42)$$

Cas du maillage orthogonal et régulier

Pour un maillage orthogonale (Figure 3.4), on vérifie:

$$\overline{II'} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{OF} = 0, \quad (3.43)$$

soit pour tout $j \in \text{Vois}(i)$,

$$\alpha_{ij} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{IJ}} \quad (3.44)$$

De plus, si ce dernier est régulier suivant toutes les directions du domaine de calcul, on vérifie :

$$\overline{IJ} = 2 \overline{OJ} ,$$

soit pour tout $j \in \text{Vois}(i)$:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} \quad (3.45)$$

et

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} (b_i + b_j) S_{ij} \mathbf{n}_{ij} \quad (3.46)$$

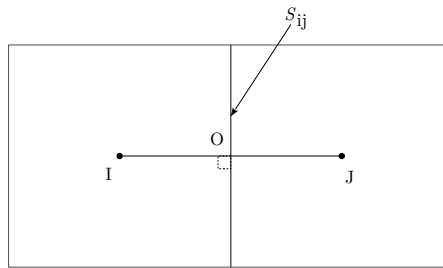


FIGURE 3.3 – Représentation de mailles - ou volumes de contrôle - orthogonales internes au domaine de calcul

Gradient au voisinage d'une singularité

On considère une fonction scalaire b fonction d'une variable $x \in [0; L]$, telle que :

$$b(x) = \begin{cases} B_0 & \text{si } x < \frac{L}{2} \\ B_1 & \text{si } x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

Le domaine de définition de la fonction se décompose en six éléments de longueur Δx , désignés x_i , pour tout entier $1 \leq i \leq 6$, tels que $x_i = i \Delta x$. La fonction scalaire b est définie discrètement par $b(x_i) = b_i$, soit :

$$b_i = \begin{cases} B_0 & \text{si } i \leq 3 \\ B_1 & \text{si } i \geq 4 \end{cases} \quad (3.47)$$

On souhaite déterminer si le schéma issu de la méthode sans-reconstruction (eq. 3.46) est adapté au traitement des singularités d'une fonction scalaire telle que b . Pour cela nous calculons le gradient de b obtenu à partir d'un schéma *upwind* d'ordre 1 et le comparons à celui obtenu à partir du schéma *sans-reconstruction* de *Code_Saturne*.

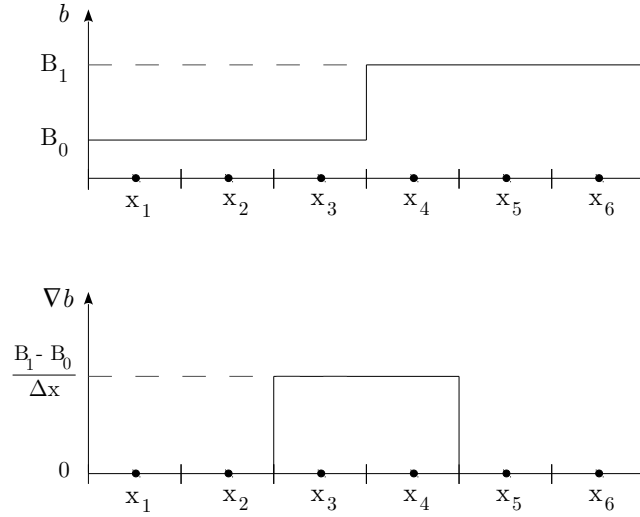


FIGURE 3.4 – Représentation d'une fonction scalaire b présentant une singularité (haut) et du gradient associé ∇b (bas)

- A partir du schéma *upwind* d'ordre 1, on obtient pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 6$:

$$(\nabla b)_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} \quad (3.48)$$

soit,

$$(\nabla b)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq 2 \text{ et } i \geq 5 \\ \frac{B_1 - B_0}{\Delta x} & \text{si } 3 \leq i \leq 4 \end{cases}$$

- À partir de la *méthode sans reconstruction*, on vérifie pour toute cellule Ω_i :

$$|\Omega_i| = 2 \, OI \, S_{ij} = \Delta x \, S_{ij} \quad (3.49)$$

soit,

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} (b_i + b_j) S_{ij} \mathbf{n}_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} (b_i + b_j) \mathbf{n}_{ij}$$

Le domaine de définition de b est tel que toute cellule Ω_i strictement à l'intérieur du domaine présente deux voisins immédiats Ω_{i+1} et Ω_{i-1} , tels que $\mathbf{n}_{i-1} = -1$ et $\mathbf{n}_{i+1} = 1$. On en déduit :

$$\mathbf{G}_i = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j \in \text{Vois}(i)} \frac{1}{2} (b_i + b_j) \mathbf{n}_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{1}{2} (b_i + b_{i-1}) + \frac{1}{2} (b_i + b_{i+1}) \right]$$

Soit,

$$\mathbf{G}_i = \frac{b_{i+1} - b_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3.50)$$

A partir de la définition de la fonction scalaire b (eq. 3.47), on en déduit:

$$(\nabla b)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq 2 \text{ et } i \geq 5 \\ \frac{B_1 - B_0}{2\Delta x} & \text{si } 3 \leq i \leq 4 \end{cases}$$

Le gradient d'une fonction scalaire définie sur un domaine constitué de mailles orthogonales et régulières est calculé par un schéma spatial d'ordre 2 dans *Code_Saturne* (cf. équation 3.50) et n'est donc pas adapté au traitement de singularités d'une fonction scalaire donnée nécessitant un schéma d'ordre 1. La comparaison entre le schéma *upwind* d'ordre (cf. équation 3.50) et celui issu de la méthode *sans-reconstruction* de *Code_Saturne* (cf. équation 3.48) permet d'en déduire que ce dernier sous-estime d'un facteur 2 la valeur du gradient attendu au voisinage d'une singularité. Dans la suite, nous proposons une "alternative numérique" pour conserver des schémas d'ordre 2 en espace - nécessaires pour le traitement des variables continues du champ fluide - tout en garantissant une estimation adéquate des gradients au voisinage des fortes singularités que peut présenter le champ des variables solide.

3.4.2 Résolution en maillage par cellule de base

Le problème macroscopique est défini pour un taux de variation spatiale déterminé par la forme, le volume et la disposition des cellules de base du faisceau considéré. Cependant, le schéma de discrétisation spatiale retenu à ce stade pour le calcul des opérateurs de gradient et/ou de divergence est d'un ordre trop élevé pour une estimation adéquate des taux de variation du champ de déplacement solide pouvant présenter de fortes singularités. Pour contourner cette difficulté, nous adoptons une "astuce numérique" consistant à décomposer toute cellule de base Ω_i en un nombre fini N_i de mailles orthogonales, chaque maille représentant un volume de contrôle désigné par ω_i^k , pour tout entier $1 \leq k \leq N_i$.

Décomposition des cellules de base Ω_i

Les variables \mathbf{V}_f , P et \mathbf{u}_s définies au centres des cellules Ω_i sont des grandeurs intensives, et sont ainsi associées respectivement au variables \mathbf{V}_f^k , P^k et \mathbf{u}_s^k définis au centre du volume de contrôle ω_i^k par les relations suivantes :

$$\mathbf{V}_f = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} \mathbf{V}_f^k |\omega_i^k| \quad (3.51)$$

$$P = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} P^k |\omega_i^k| \quad (3.52)$$

$$\mathbf{u}_s = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} \mathbf{u}_s^k |\omega_i^k| \quad (3.53)$$

avec,

$$|\Omega_i| = \sum_k^{N_i} |\omega_i^k|$$

Pour les applications traitées dans cette thèse, toute cellule de base Ω_i est décomposée en N_i **éléments identiques** et **orthogonaux entre eux**. La figure 3.5 en illustre les possibilités de décomposition d'une cellule de base carré. Dans le cadre de cette hypothèse, on vérifie pour tout volume Ω_i :

$$|\Omega_i| = N_i |\omega_i^k| \quad (3.54)$$

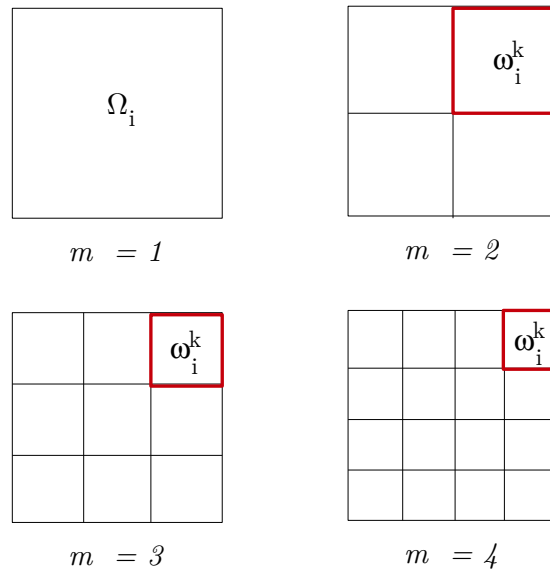


FIGURE 3.5 – *Décomposition d'une cellule de base Ω_i en $N_i = m \times m$ mailles identiques et orthogonales entre elles.*

Le problème macroscopique étant initialement adapté à une discrétisation spatiale dont le pas dépend de la taille des cellules de base Ω_i , il faut adapter l'écriture du système d'équation à une résolution dont le pas d'espace dépend de celle des mailles ω_i^k , et ceci, en assurant les lois de conservations bien vérifiées pour toute cellule Ω_i .

Équations de bilan sur ω_i^k

BILAN DE LA MASSE SUR ω_i^k L'équation de bilan de masse à résoudre dans Ω_i , soit pour $k = 1$, est rappelée ci-dessous:

$$\nabla \cdot (\phi_f \mathbf{V}_f) = \Gamma_m \quad (3.55)$$

Les sources de masse $\Gamma_{\mathbf{m}}$ sont des quantités intensives ; il est donc possible de les définir comme une combinaison des valeurs $\Gamma_{\mathbf{m}}^k$ prises sur chaque volume ω_i^k , tel que :

$$\Gamma_{\mathbf{m}} = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} \Gamma_{\mathbf{m}}^k |\omega_i^k| \quad (3.56)$$

De plus, on considère que les sources de masse $\Gamma_{\mathbf{m}}$ sont réparties de façon homogène sur toute cellule Ω_i constitué de N_i volume de contrôle ω_i^k ; ce qui entraîne :

$$\Gamma_{\mathbf{m}} = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} \Gamma_{\mathbf{m}}^k |\omega_i^k| = \frac{1}{|\Omega_i|} \Gamma_{\mathbf{m}}^k \sum_k^{N_i} |\omega_i^k| = \frac{\Gamma_{\mathbf{m}}^k |\omega_i^k|}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} 1$$

Soit pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq N_i$,

$$\Gamma_{\mathbf{m}} = \Gamma_{\mathbf{m}}^k$$

En substituant les quantités $\mathbf{V}_{\mathbf{f}}$ et $\Gamma_{\mathbf{m}}$ par les équations (3.56) et (3.51), on obtient :

$$\nabla \cdot \left(\phi_f \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^k |\omega_i^k| \right) = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} \Gamma_{\mathbf{m}} |\omega_i^k|$$

Pour tout entier $1 \leq i \leq n_e$, les cellules Ω_i sont de volumes identiques entre elles ; et les mailles ω_i^k sont aussi identiques entre elles au sein d'une cellule Ω_i donnée, ainsi que d'une cellule à l'autre. De ce fait, les quantités $|\omega_i^k|$ et $|\Omega_i|$ permutent avec les opérateurs de divergence et/ou de sommation. On obtient alors :

$$\sum_k^{N_i} \nabla \cdot (\phi_f \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^k) = \sum_k^{N_i} \Gamma_{\mathbf{m}}$$

Puisque Γ_m est invariant pour tout entier $k \in [1; N_i]$ d'une cellule Ω_i donnée, on obtient :

$$\nabla \cdot (\phi_f \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^k) = \Gamma_{\mathbf{m}} \quad (3.57)$$

BILAN DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT SUR ω_i^k L'équation de bilan de quantité de mouvement à résoudre dans Ω_i , soit pour $k = 1$, est rappelée ci-dessous:

$$\rho_f^* \frac{\partial \mathbf{V}_{\mathbf{f}}}{\partial t} = -\nabla P + \nabla \cdot \mu \left(\bar{\bar{\nabla}} \mathbf{V}_{\mathbf{f}} + {}^i \bar{\bar{\nabla}} \mathbf{V}_{\mathbf{f}} \right) - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{f}}) + \Gamma_{\mathbf{f}} \quad (3.58)$$

Les sources de quantité de mouvement $\Gamma_{\mathbf{f}}$ sont des quantités intensives. De même que pour la source de masse, il est donc possible de les définir comme une combinaison des valeurs $\Gamma_{\mathbf{f}}^k$

prises sur chaque volume ω_i^k , tel que :

$$\Gamma_{\mathbf{f}} = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_k^{N_i} \Gamma_{\mathbf{f}}^k |\omega_i^k| \quad (3.59)$$

De plus, en considérant les sources en quantité de mouvement $\Gamma_{\mathbf{f}}$ réparties de façon homogène sur l'ensemble des volumes de contrôle ω_i^k pour une cellule Ω_i donnée, on obtient pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq N_i$:

$$\Gamma_{\mathbf{f}} = \Gamma_{\mathbf{f}}^k$$

Pour tout entier $1 \leq i \leq n_e$, les cellules Ω_i sont de volumes identiques entre elles ; et les mailles ω_i^k sont aussi identiques entre elles au sein d'une cellule Ω_i donnée, ainsi que d'une cellule à l'autre. De ce fait, les quantités $|\omega_i^k|$ et $|\Omega_i|$ permutent avec les opérateurs de divergence et/ou de sommation. En substituant les quantités $\mathbf{V}_{\mathbf{f}}$, p et $\Gamma_{\mathbf{f}}$ par les relations (3.59), (3.51) et (3.52), et en considérant $\Gamma_{\mathbf{f}}$ invariant pour tout entier $k \in [1; N_i]$ d'une cellule Ω_i donnée, on obtient finalement :

$$\rho_f^* \frac{\partial \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^k}{\partial t} = -\nabla P^k + \nabla \cdot \mu \left(\bar{\nabla} \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^k + {}^t \bar{\nabla} \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^k \right) - \frac{2}{3} \nabla \left(\mu \nabla \cdot \mathbf{V}_{\mathbf{f}}^k \right) + \Gamma_{\mathbf{f}} \quad (3.60)$$

DÉPLACEMENT DU CYLINDRE Ω_s SUR ω_i^k A partir des mêmes considérations vis à vis du bilan de quantité de mouvement, il vient immédiatement :

$$M^* \ddot{\mathbf{u}}_s^k + C^* \dot{\mathbf{u}}_s^k + K \mathbf{u}_s^k = \Gamma_s \quad (3.61)$$

Effet du raffinement sur la solution cellulaire

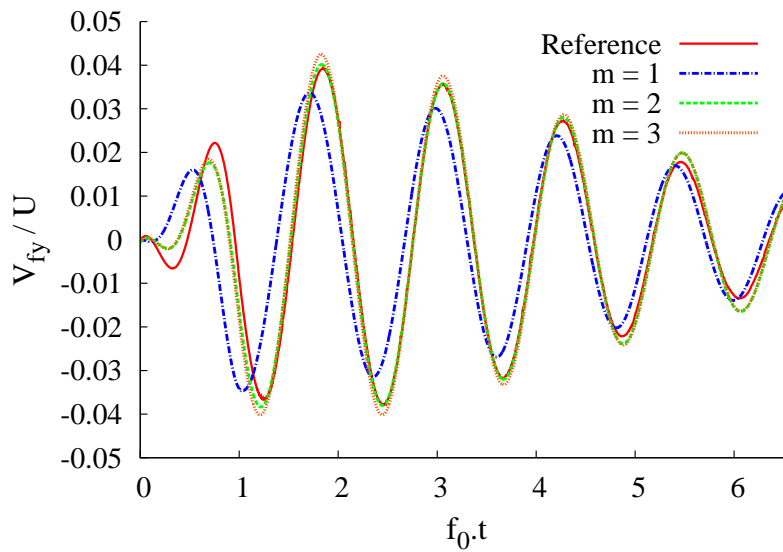


FIGURE 3.6 – *Effet du raffinement sur la qualité de la solution numérique du problème macroscopique: pour une cellulaire de base donnée, la composante V_{fy} du champ de vitesse fluide est tracée au cours du temps.*

À l'aide du modèle numérique proposé ci-dessus, on se propose de résoudre les champs de vitesse fluide cellulaire dans un faisceau dont le déplacement des structures est imposé. On se place dans une configuration similaire à celle introduite au *Chapitre 2*, Figure 2.10.

Pour une cellule de base donnée, la Figure 3.6 montre l'effet raffinement en maillage sur la qualité de la solution macroscopique ; cette dernière étant confrontée la solution microscopique de référence moyennée sur la cellule considérée. Le raffinement vérifiant $m = 1$ présente une solution de qualité nettement moins satisfaisante que celles correspondant à $m = 2$ et $m = 3$. De plus, les raffinements $m = 2$ et $m = 3$ aboutissent à des solutions quasiment superposées, révélant que le maillage de type $m = 2$ est suffisant pour une résolution numérique fiable du problème homogénéisé.

Conclusion partielle

La méthode numérique adoptée pour la résolution du problème homogénéisé a été introduite. On a montré que la décomposition d'une cellule de base en un minimum de 4 mailles est nécessaire pour garantir la précision du modèle macroscopique. Cette méthode donne lieu à des tests d'évaluation de l'approche multi-échelle, faisant l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

VIBRATIONS À 1DDL ET AMORTIES AU COURS DU TEMPS

Sommaire

4.1	Faisceaux de tubes cylindriques	94
4.1.1	Système de référence microscopique	94
4.1.2	Paramètres numériques macroscopiques	97
4.1.3	Vibrations en fluide initialement au repos	98
4.1.4	Vibrations sous écoulement transverse	106
4.1.5	Vibrations à haute fréquence	112
4.2	Faisceau de tubes hexagonaux	117
4.2.1	Adaptation du problème homogénéisé	117
4.2.2	Système de référence microscopique	119
4.2.3	Mise en données du problème homogénéisé	121
4.2.4	Comparaison micro/macro	123
4.3	Apports en termes de gain CPU	131

Les écoulements et vibrations dans les faisceaux de cylindres sont modélisés par une approche multi-échelle, dont le principe est détaillé dans les *Chapitres 1* et *2*. Les méthodes de calcul numérique retenues pour résoudre ce problème sont décrites au *Chapitre 3*. Le présent chapitre permet d'évaluer les capacités prédictives du modèle macroscopique proposé, pour des faisceaux de grande dimension présentant des réponses vibratoires variées.

Les données de référence - ou éléments de validation - sont obtenues à partir de la simulation des écoulements microscopiques¹ : les variables hydrodynamiques calculées à cette échelle sont ainsi moyennées dans chaque cellule de base du système tubulaire considéré afin de rendre leur niveau de description spatiale conforme à celle de la modélisation macroscopique.

Les écoulements inter-tubes sont limités ici au régime laminaire, de sorte que les simulations microscopiques sont réalisées au moyen d'une *résolution directe des équations de Navier-Stokes* (DNS²) en des temps de calcul raisonnables. Le déplacement des interfaces mobiles est calculé à partir de la méthode numérique *ALE* (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) implémentée dans *Code_Saturne* depuis 1999 (*cf.* Archambeau et Guimet [2]). Les fondements de cette méthode ne sont pas repris ici : pour une description détaillée, on se réfère au papier de Chan [10] ou à la note technique [2] de *Code_Saturne*.

La dynamique des structures entre en interaction avec des écoulements *initialement au repos*, ou bien gouvernés par un *courant amont stationnaire*. Dans les deux cas, la dynamique du fluide interstitiel est fortement perturbé par la mise en mouvement des structures.

Pour chaque configuration traitée dans ce chapitre, toute structure mobile est en **oscillations amorties au cours du temps** et se déplace suivant **1 degré de liberté (1 DDL)**. On met en évidence des réponses en déplacement diversifiées au sein de chaque système tubulaire, ainsi que des structures mises en mouvement par l'effet de l'écoulement interstitiel seul.

Dans un premier temps, le modèle homogénéisé est évalué pour des faisceaux de tubes cylindriques, et dans un second temps, pour un faisceau de tubes à section hexagonale. La géométrie hexagonale nécessite d'adapter préalablement l'écriture des charges pariétales hydrodynamiques.

1. modélisés à l'échelle du *milieu continu*

2. Direct Numerical Simulations

4.1 Faisceaux de tubes cylindriques

4.1.1 Système de référence microscopique

Configurations géométriques et mécaniques

On simule numériquement les réponses hydrodynamiques et vibratoires d'un faisceau constitué de 361 cylindres disposés suivant un pas carré. Le système considéré présente deux zones distinctes (Figure 4.1) :

- une **zone mobile** localisée au centre du faisceau et constituée de 81 cylindres mobiles, toutes initialement à l'équilibre (ou au repos). L'action d'un bref signal de force extérieure au système met en mouvement les structures désignées comme "*Impulsées*". Suite à cette sollicitation initiale, chaque cylindre est libre de se déplacer individuellement. Les structures désignées comme "*Libres*" ne subissent pas d'impulsion initiale et sont mises en mouvement par l'écoulement interstitiel oscillant.
- une **zone fixe** en périphérie de la zone mobile est constituée des 280 autres cylindres du faisceau, tous maintenus fixes. Dans cette zone, seuls les champs hydrodynamiques moyens sont observés.

Cette configuration permet de tester la capacité du modèle macroscopique à simuler l'hydrodynamique instationnaire d'un domaine constitué de structures fixes ; cette aptitude pouvant concerner des problématiques actuelles en thermohydraulique des faisceaux fixes et indéformables (Chanderis [12, 11], Drouin [15, 16]). De plus, considérer deux types de sollicitations - purement hydrodynamique ou "forcée" - pour les tubes mobiles est intéressant pour mettre en évidence la dépendance des réponses du modèle macroscopique au type de conditions initiales.

Le faisceau de référence est en interaction avec un écoulement interstitiel gouverné par un courant stationnaire et unidirectionnel suivant l'axe (Ox), et de vitesse inter-tube de norme U_∞ . Suivant la configuration traitée, l'écoulement peut être initialement au repos, ce qui correspond à $U_\infty = 0$. Chaque cylindre de la zone mobile se déplace suivant **1 degré de liberté**, celui de la direction verticale (Oy). La Figure 4.1 présente le système de numérotation retenu pour l'identification des différentes cellules de base et/ou structures du large faisceau, la Table 4.1 regroupe les paramètres dimensionnels et adimensionnels invariables d'une configuration à l'autre.

D	v	ρ_f	ρ_s	U	P^*	m^*
10,0 mm	$1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	1,4	3,0

TABLE 4.1 – Paramètres dimensionnels

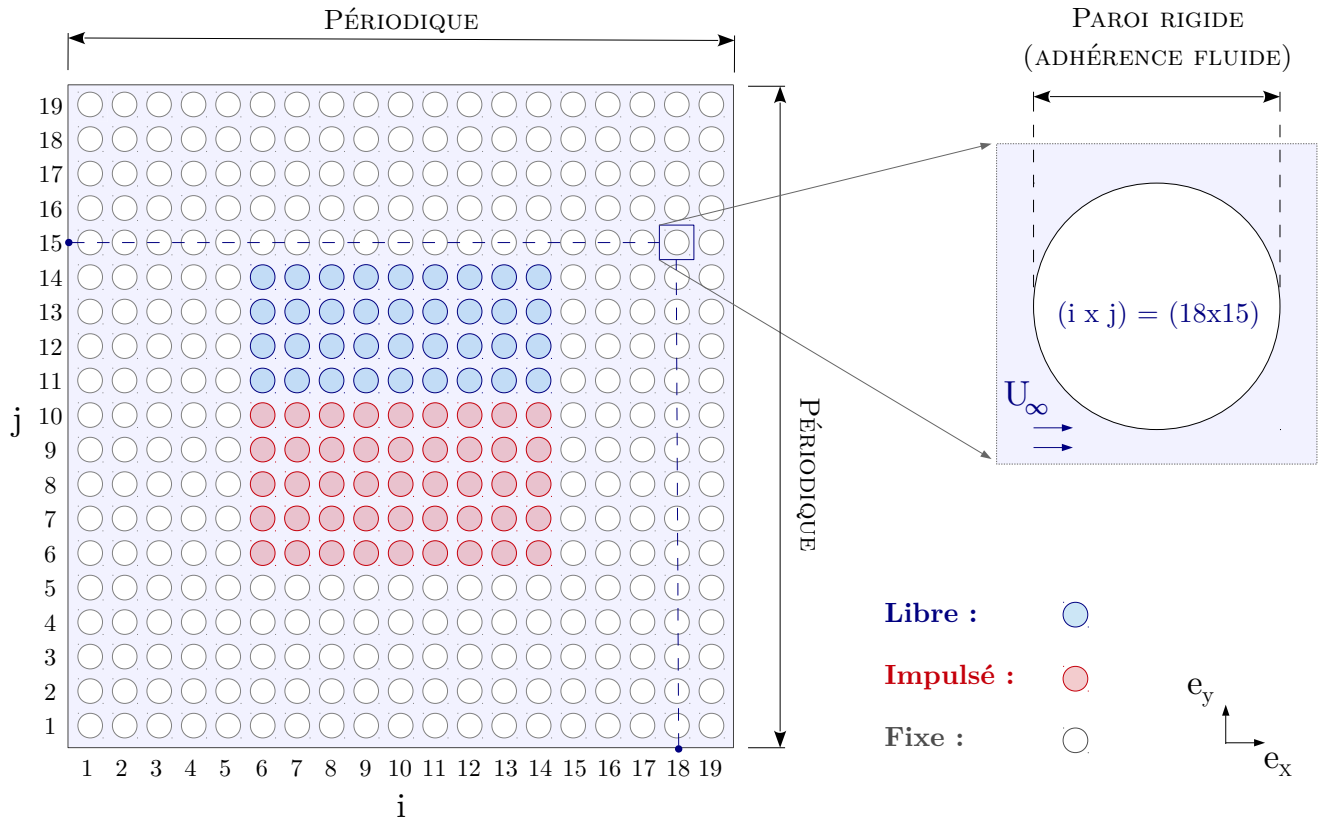


FIGURE 4.1 – *Faisceau de référence et système de numérotation des cellules de base* : Le faisceau est constitué de 361 cylindres. Chaque cylindre est identifié par sa position $i \times j$, de la i^{me} colonne et de la j^{me} ligne, pour tout couple d'entiers $\{i ; j\} \in [1; 19]^2$. A tout instant, les cylindres mobiles sont repérés par les coordonnées $\{i; j\} \in [6; 14]^2$, tandis que les cylindres maintenus fixes sont repérés par les coordonnées $\{i; j\} \in ([1; 5] \cup [15; 19])^2$.

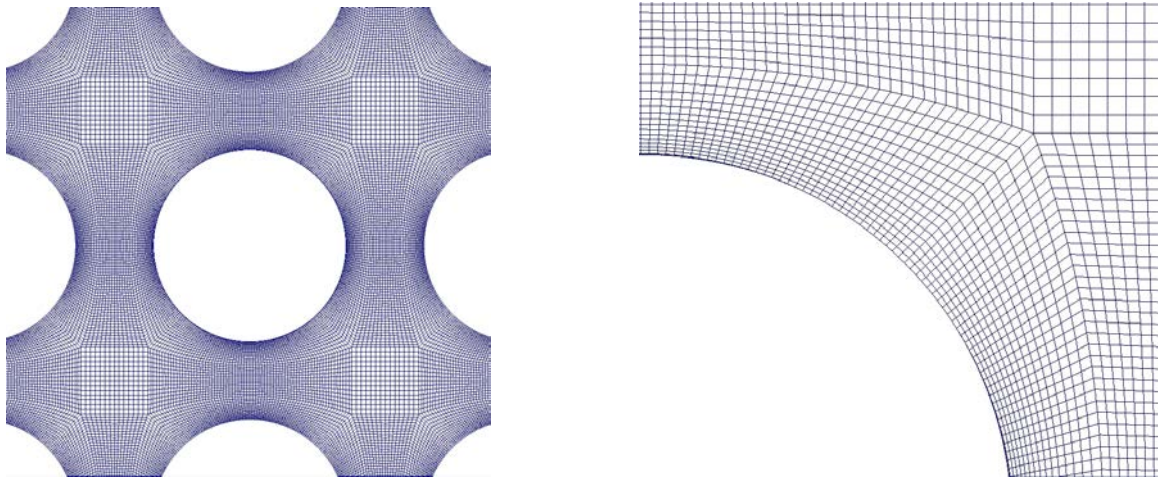


FIGURE 4.2 – *Maillage au voisinage d'une interface fluide-cylindre du domaine microscopique*

Paramètres numériques

MAILLAGE Le maillage du domaine entier est construit à partir de la discrétisation d'une cellule de base que l'on translate périodiquement suivant le pas carré du faisceau. Le critère de raffinement consiste à assurer un minimum d'éléments dans l'épaisseur de la couche limite désignée par δ . L'estimation de δ dépend du régime de l'écoulement auquel est soumis la structure. Pour un cylindre oscillant et immergé dans un fluide au repos, l'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de *Stokes* et vérifie le critère suivant (*approximation de la plaque oscillante*):

$$\delta \leq \delta_{St} \quad \text{avec} \quad \delta_{St} = \frac{D}{\sqrt{\pi St/2}}$$

Pour un cylindre fixe soumis à un écoulement stationnaire, l'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de *Reynolds* et vérifie le critère suivant (*solution de Blasius*) :

$$\delta \leq \delta_{Re} \quad \text{avec} \quad \delta_{Re} = \frac{D}{\sqrt{Re}}$$

Pour un cylindre vibrant, soumis à un écoulement permanent, c'est la vitesse réduite U_r qui conditionne le critère vérifié par l'épaisseur de la couche limite δ . Si $U_r < 1$, la couche limite δ_{St} due à la vibration du cylindre en fluide au repos est moins épaisse que la couche limite δ_{Re} due à l'écoulement stationnaire ; et inversement si $U_r > 1$. Dans le cas d'un écoulement transverse, on considère que l'épaisseur de la couche limite vérifie le critère suivant :

$$\delta \leq \begin{cases} \frac{D}{\sqrt{\pi St/2}} & \text{si } U_r < 1 \\ \frac{D}{\sqrt{Re}} & \text{si } U_r > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

L'ensemble des configurations traitées dans cette thèse considère des écoulements laminaires, soit des nombres de Reynolds tels que $Re \leq 340$. On choisit par ailleurs de se restreindre à une gamme de nombres de Stokes vérifiant $100 \leq St \leq 400$.

Dans la limite de ces paramètres adimensionnels, l'estimation la plus pénalisante de δ est telle que $\delta \leq 0,04 D$. On choisit un raffinement en proche-paroi d'une interface fluide-cylindre tel que l'épaisseur de couche limite soit composée d'un minimum de $N_\delta = 8$ éléments, de taille minimale Δx_r ; On assure un nombre d'éléments N_θ autour de la paroi tel que $N_\theta \approx \pi D / \Delta x_\theta$, avec $\Delta x_\theta \approx 2\Delta x_r$.

Le maillage finalement obtenu compte 1 824 éléments par cellule de base, soit 658 464 éléments pour le domaine entier: la Figure 4.2 permet de le visualiser.

PAS DE TEMPS Le pas de temps retenu dépend de la condition CFL suivante :

$$U \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Le raffinement en maillage retenu nécessite ainsi un pas de temps vérifiant $\Delta t \leq 5,0 \cdot 10^{-3}$ s. Par ailleurs, dans le cadre de ces travaux, les simulations ALE sont réalisées pour un pas de temps identique pour les solveurs fluide et structure. Afin de garantir une description fiable des réponses structures, on opte pour un Δt permettant de restituer un minimum de 400 points par période *propre* d'oscillation. De ce fait, toutes les simulations microscopiques sont réalisées pour un pas de temps tel que $\Delta t = 2,0 \cdot 10^{-3}$ s.

CONDITIONS AUX LIMITES Pour toutes les configurations traitées - avec ou sans courant stationnaire - les frontières extérieures du domaine (*haute, basse, gauche et droite*) sont assignées de conditions numériques *périodiques* : ce choix permet de simuler un domaine "*infini*" et de se prémunir d'éventuels effets de bord pouvant affecter la solution de l'écoulement. Pour générer un courant stationnaire avec une telle condition, un terme source en quantité de mouvement \mathbf{q}_∞ est défini de façon homogène dans le domaine de calcul : la valeur de \mathbf{q}_∞ est invariante au cours du temps, et égale au gradient de pression gouvernant le courant de vitesse stationnaire inter-tubes U_∞ . Les bords circulaires représentant les interfaces fluide-cylindres sont définis numériquement comme des parois rigides, vérifiant la condition d'adhérence pour le fluide (Figure 4.1).

4.1.2 Paramètres numériques macroscopiques

MAILLAGE Le maillage du domaine macroscopique est tel que chaque cellule de base présente un raffinement de l'ordre de $m \times m$, où m définit le nombre d'éléments par côté. Une estimation adéquate du gradient macroscopique au voisinage d'une singularité nécessite de vérifier $m \geq 2$ (voir *Chapitre 3*, section 3.4.2). On opte donc pour un raffinement correspondant à $m = 2$; soit 4 éléments par cellule, ou 1 444 éléments pour le domaine entier.

Pour $m = 2$, les solutions obtenues à l'échelle d'une maille sont moyennées sur chaque cellule de base afin de rendre leur niveau d'observation spatial conforme à celui de l'échelle macroscopique (*cf. Décomposition des cellules de base Ω_i* , section 3.4.2).

PAS DE TEMPS Le domaine de calcul macroscopique présente des mailles bien plus grandes que celles du domaine microscopique ; ce qui entraîne immédiatement une condition CFL moins restrictive. Le pas de temps macroscopique reste cependant égal à celui retenu pour les simulations microscopiques afin de garantir un minimum de 400 points par période d'oscillation ; d'où $\Delta t = 2,0 \cdot 10^{-3}$ s.

CONDITIONS AUX LIMITES Similairement aux conditions de calcul microscopique, les frontières extérieures du domaine sont assignées de conditions numériques *périodiques*.

4.1.3 Vibrations en fluide initialement au repos

On se place dans le cas particulier où $f_s = 1,1$ Hz et $U_\infty = 0$ m.s⁻¹.

Diversité des réponses vibratoires microscopiques

A l'instant initial ($t = 0$), le système est à l'équilibre: tous les cylindres du faisceau sont fixes et le fluide initialement au repos. Au cours de l'intervalle de temps $[0; t_{init}]$, un même signal de force harmonique est imposé à l'ensemble des cylindres désignés comme *Impulsés*, conformément à la Figure 4.1. Cette force entraîne les structures dans des oscillations, amorties au cours du temps par la présence du fluide interstitiel. L'écoulement, perturbé par les structures impulsées, entraîne simultanément les structures désignées comme *Libres* dans des mouvements d'oscillations. Pour rappel, aucun paramètre d'amortissement propre n'est défini pour les structures mobiles (eq. 3.29).

Les réponses vibratoires sont décrites pour différentes structures de la zone mobile du faisceau, et dont les positions sont suffisamment éloignées les unes des autres pour identifier des comportements singuliers: les amplitudes de déplacements au cours du temps des tubes *impulsés* (6 x 9), (10 x 10) et *libre* (13 x 11), ainsi que leurs spectres, sont tracés sur les Figures 4.3 et 4.5.

Les amplitudes de déplacements des structures sollicitées sont identiques entre elles au cours du signal de force, soit pour $f_0.t \in [0; t_{init}]$. A partir de l'instant t_{init} , les amplitudes vibratoires des cylindres déplacés de leur position d'équilibre sont amorties au cours du temps, avec un taux d'amortissement ξ pouvant être différent d'une structure à l'autre, tel que le montre la Figure 4.3. Le paramètre d'amortissement ξ est évalué à l'aide des maxima d'amplitudes de déplacement $u_{sy}(t_a) = A_a$ et $u_{sy}(t_b) = A_b$, correspondant respectivement aux première et cinquième périodes d'oscillations succédant le signal de force. Pour tout cylindre mobile, le taux d'amortissement est calculé par la relation suivante :

$$\xi = \frac{\ln(A_a) - \ln(A_b)}{|t_a - t_b| f_s} \quad (4.2)$$

La variabilité des valeurs prises par ξ selon la position du cylindre est représentée sur le diagramme de la Figure 4.4. Aussi, il apparaît au cours du temps une modulation de fréquence notable entre les oscillations des différentes structures mobiles. Cela se traduit sur le spectre des déplacements par des intensités différentes d'une structure à l'autre pour la fréquence *fondamentale* F_0 (Figure 4.5). La variabilité de l'intensité du fondamental selon la position du cylindre est représentée sur le diagramme de la Figure 4.6.

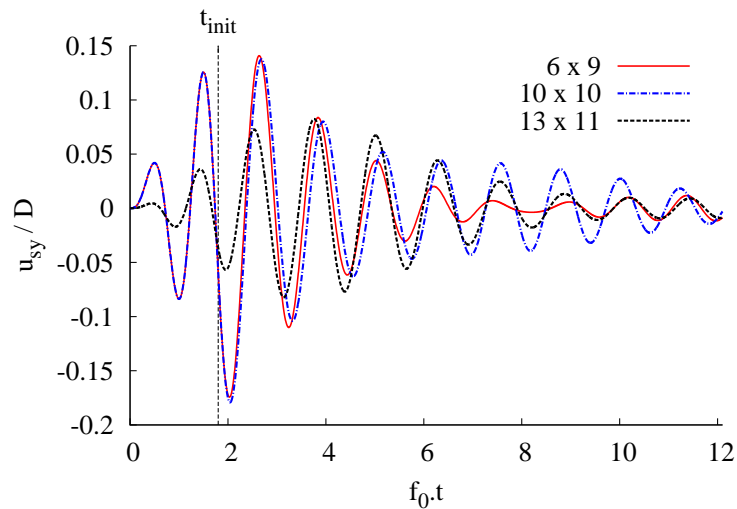


FIGURE 4.3 – Solutions microscopiques en déplacement u_{sy} de structures mobiles: sont représentées les réponses des structures Impulsées (6×9) et (10×10), et d'une autre Libre (13×11).

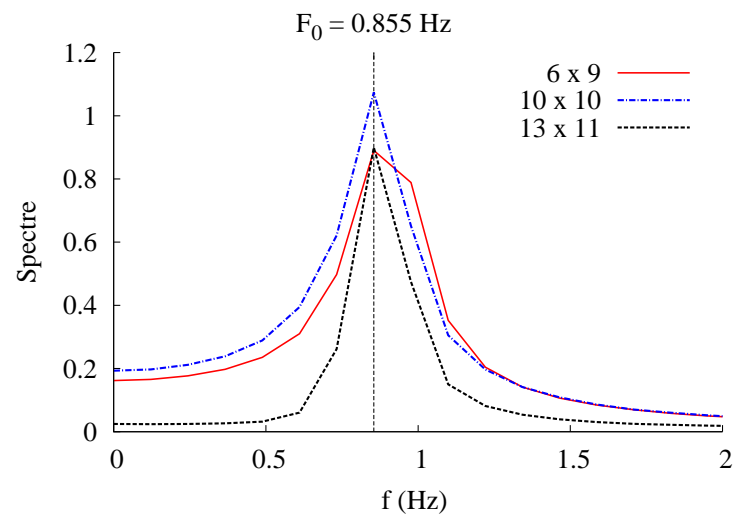


FIGURE 4.5 – Spectre des amplitudes de déplacement des structures mobiles (6×9), (10×10) et (13×11): la composante la plus intense des spectres correspond à la fréquence $F_0 = 0,86$ Hz.

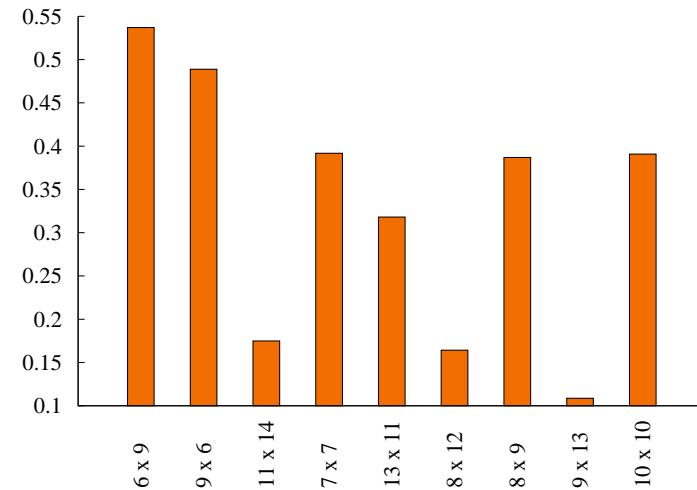


FIGURE 4.4 – Taux d'amortissement ξ suivant la position d'un cylindre mobile

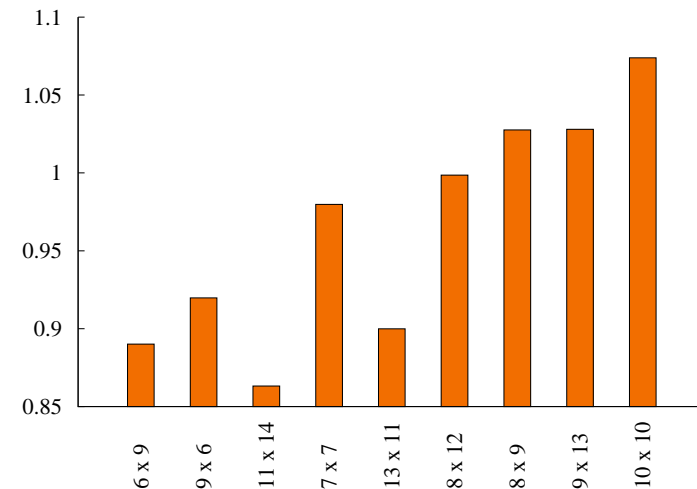


FIGURE 4.6 – Intensité du spectre des amplitudes de déplacement pour la composante fondamentale $F_0 = 0,86$ Hz.

Estimation des coefficients hydrodynamiques

Le système d'équations macroscopiques met en jeu 5 coefficients dont les valeurs sont estimées à partir de la solution numérique de l'IFS obtenue sur domaine réduit représentatif (DRR) à l'échelle microscopique. La méthode d'estimation des coefficients est décrite au *Chapitre 2*, section 2.5. Le régime vibratoire du système de référence est **amorti**. Pour ce régime, un DRR constitué d'un cylindre fixe et d'un autre mobile se montre bien représentatif de la dynamique d'un tel système (voir Figure 4.7). Les coefficients hydrodynamiques obtenus pour un tel DRR sont reportés à la Table 4.2.

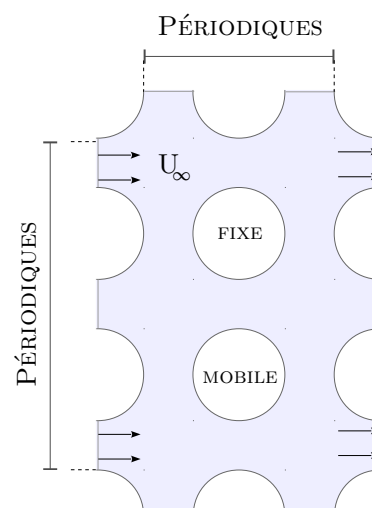


FIGURE 4.7 – DRR

C_{MF}	C_{LF}	C_{MS}	C_{LS}	C_D
1.65	5.08	1.42	4.88	—

TABLE 4.2 – Coefficients hydrodynamiques

Comparaison micro/macro

Les amplitudes de déplacement sont tracées au cours du temps pour quelques cellules de base et représentées dans la Table 4.3. Pour l'ensemble des cellules observées, les déplacements calculés au cours du temps par le modèle macroscopique sont en accord avec ceux obtenus par la simulation à l'échelle microscopique.

Les histogrammes des Figures 4.8 et 4.9 représentent pour différentes cellules le taux d'amortissement ξ et l'amplitude maximale du spectre des déplacements, et permettent d'évaluer la capacité du modèle macroscopique à reproduire les réponses vibratoires individuelles de chaque structure. Ces graphes révèlent que le modèle macroscopique est sensible à la position des différentes structures au sein du faisceau et permet de restituer la diversité des réponses vibratoire du système de référence. En effet, l'intensité du chargement hydrodynamique sur une structure donnée dépend fortement de sa proximité avec les interfaces *fixe-mobile* et/ou *impulsée-libre*.

Pour le taux d'amortissement ξ , l'écart le plus important entre les simulations microscopique et macroscopique est observé pour le cylindre (9 x 13) et s'élève à 22.1 % ; et pour l'amplitude maximale du spectre de déplacement, l'écart le plus important s'élève à 3.3% et s'observe pour le cylindre (9 x 6).

La capacité du modèle macroscopique à prédire les réponses vibratoires propres à chaque cylindre du large faisceau reste néanmoins satisfaisante. Cela se justifie par une estimation adéquate des coefficients hydrodynamiques issue de la simulation microscopique sur domaine réduit ; et simultanément, par une résolution satisfaisante de la composante V_{fy} du champ de vitesse fluide mis en jeu dans le calcul des charges pariétales hydrodynamiques.

La Table 4.4 représente l'évolution temporelle des intensités de la vitesse fluide moyenne V_{fy} au sein des mêmes cellules de base pour lesquelles les amplitudes de déplacements ont été précédemment observées (Table 4.3); et la Table 4.6 représente des distributions spatiales instantanées des vitesses et pression de l'écoulement moyen au sein du faisceau entier. Les résultats du modèle macroscopique, en terme de vitesse et pression fluides, sont également en bon accord avec les résultats de la simulation microscopique.

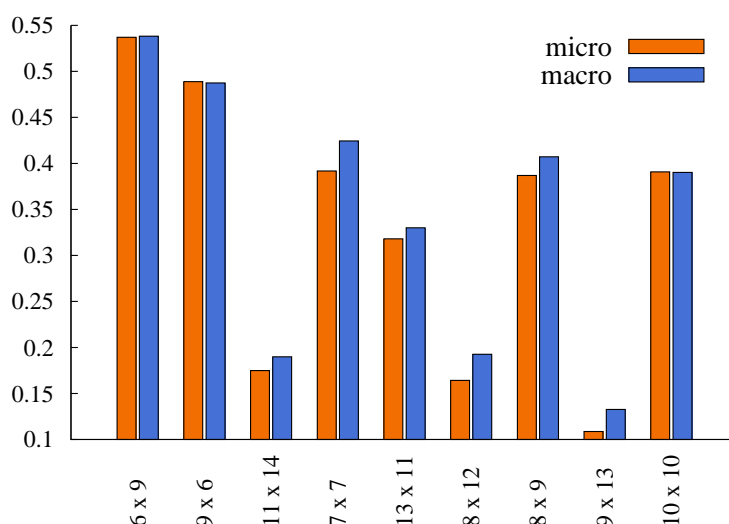


FIGURE 4.8 – Taux d'amortissement ξ suivant la position d'un cylindre mobile : comparaison entre les résultats des simulations aux échelles micro et macro

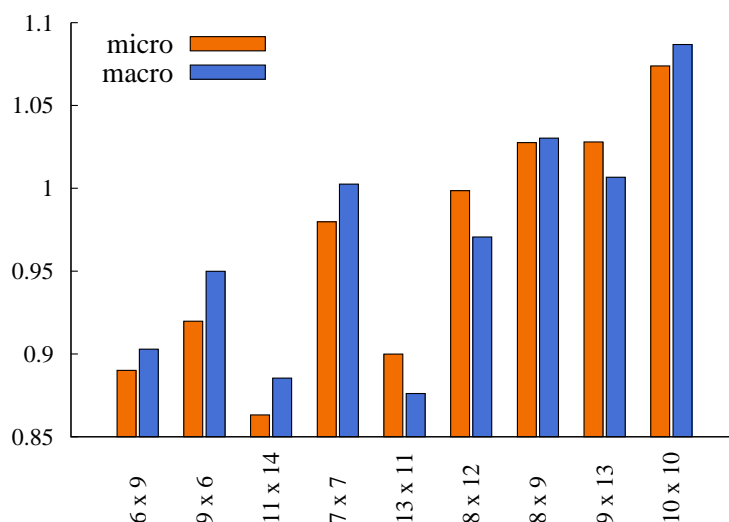


FIGURE 4.9 – Intensité du spectre de déplacement pour la composante fondamentale $F_0 = 0.86$ Hz : comparaison entre les résultats des simulations aux échelles micro et macro.

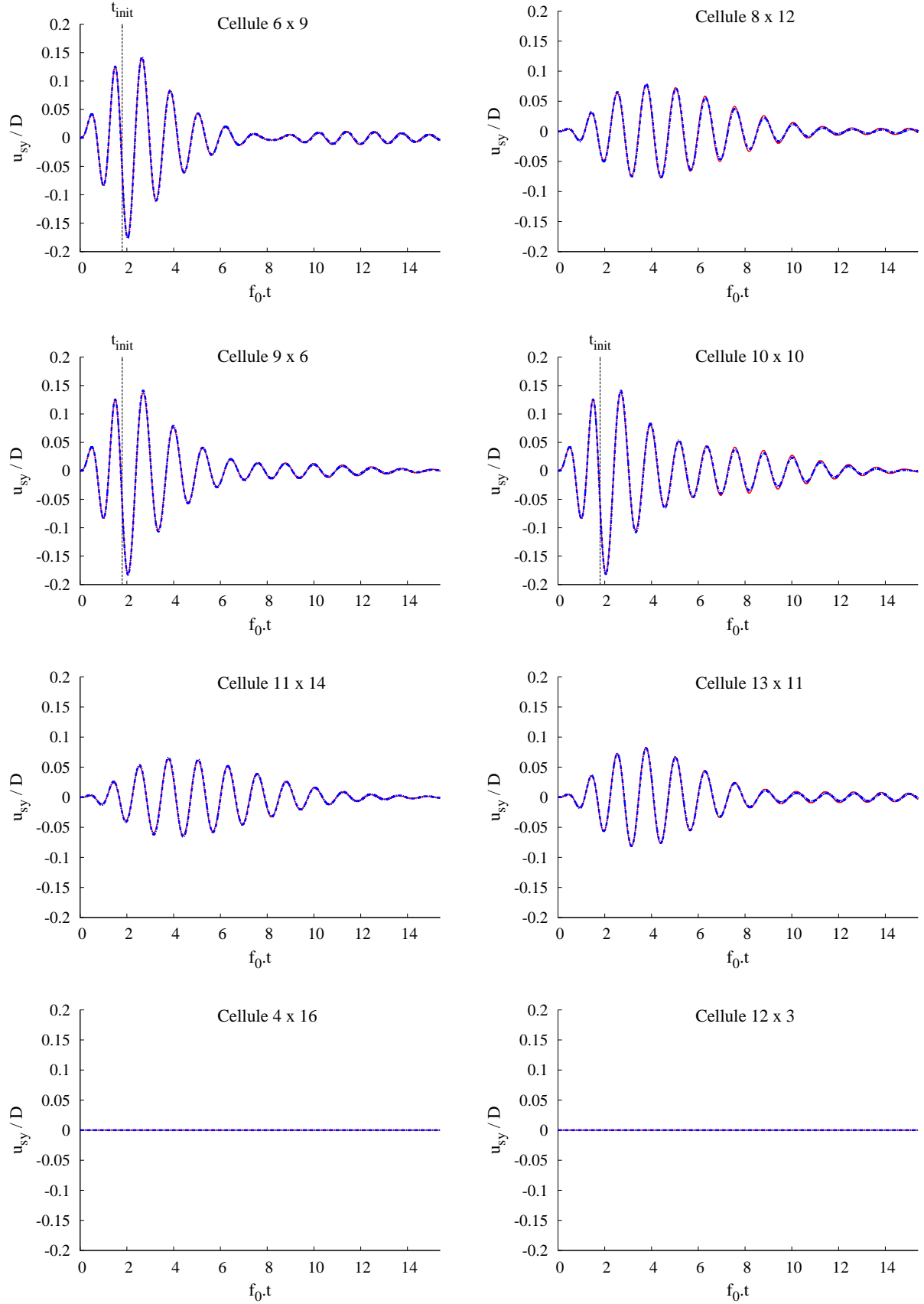


TABLE 4.3 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (6 x 9), (9 x 6) et (10 x 10) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des cellules (4 x 16) et (12 x 3) sont fixes.

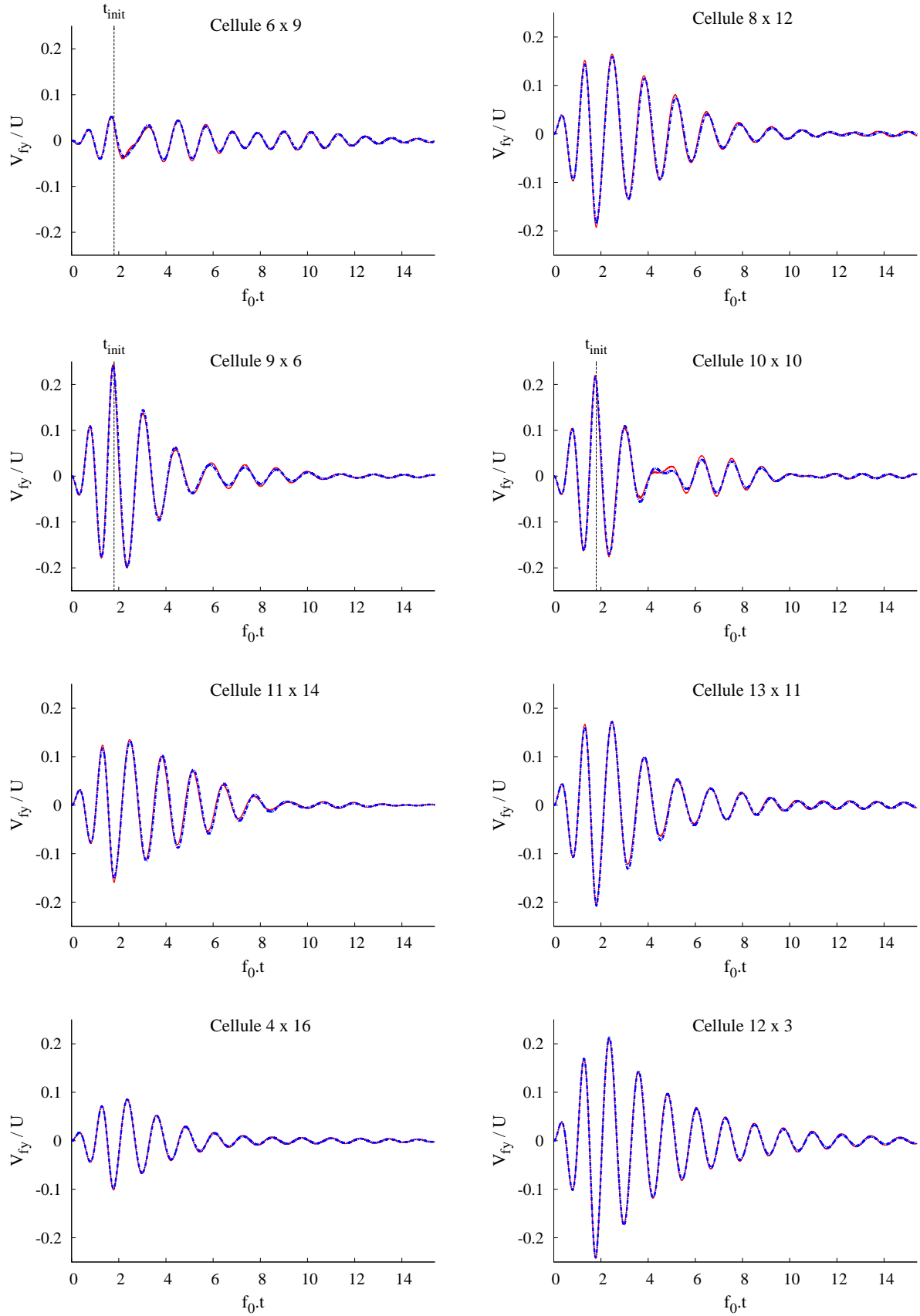


TABLE 4.4 – Comparaison entre les intensités de vitesse fluide $V_{fy} = (\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: ---. Les cylindres associés aux cellules (6 x 9), (9 x 6) et (10 x 10) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des cellules (4 x 16) et (12 x 3) sont fixes.

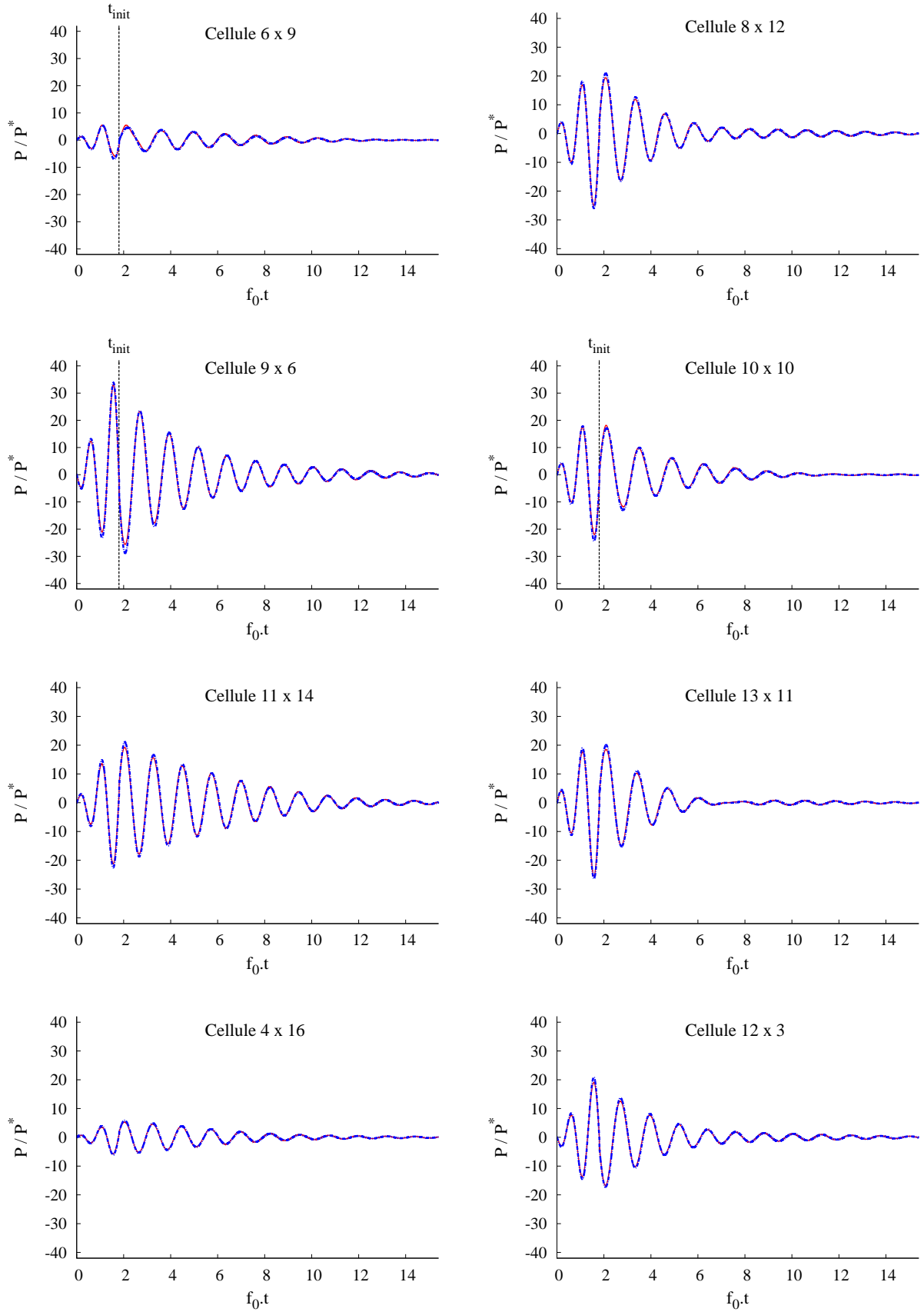


TABLE 4.5 – Comparaison entre les pressions moyennes cellulaires P issues des simulations aux échelles micro: — et macro: ---. Les cylindres associés aux cellules (6 x 9), (9 x 6) et (10 x 10) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des cellules (4 x 16) et (12 x 3) sont fixes.

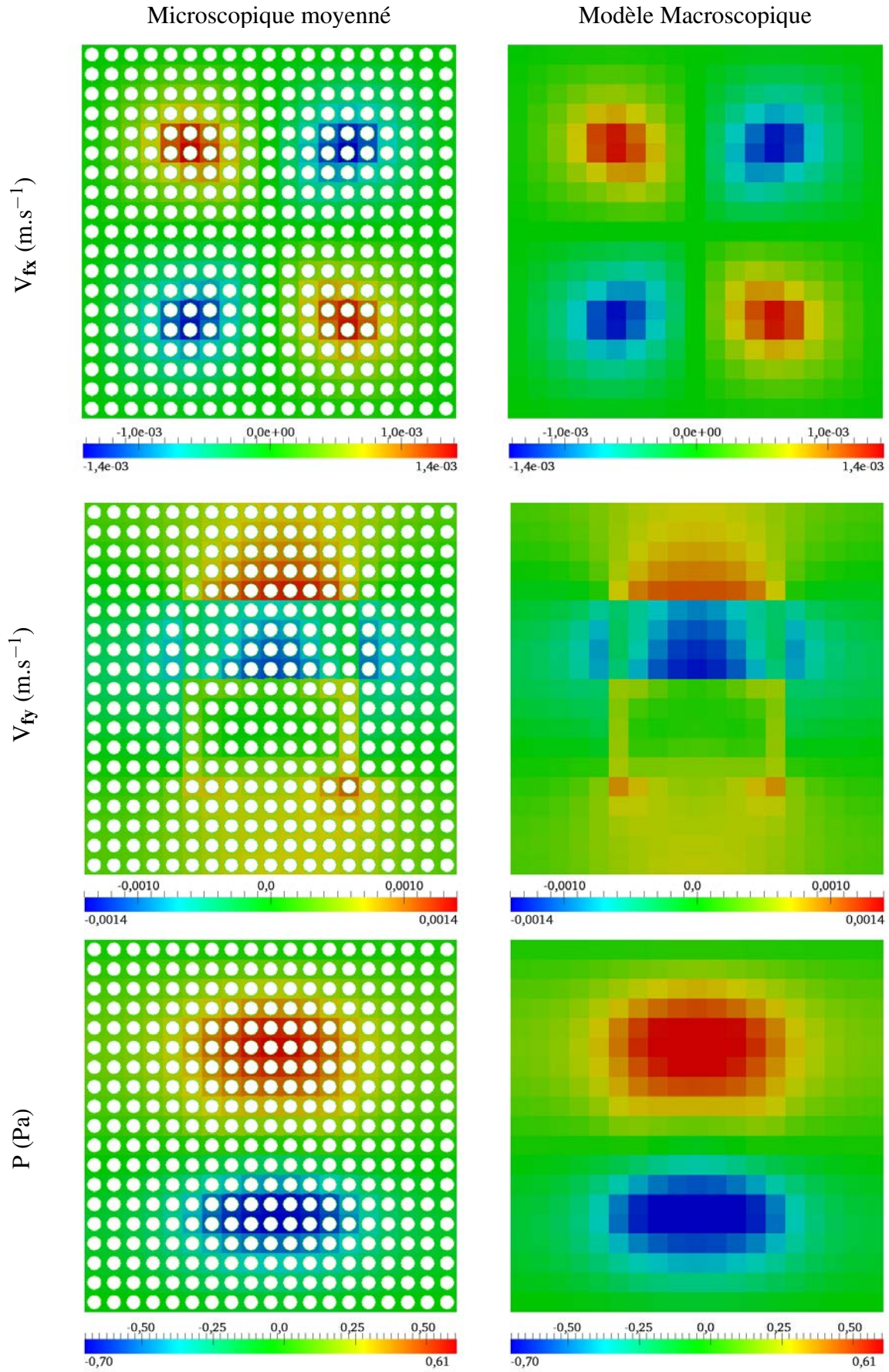


TABLE 4.6 – Comparaison entre les champs de vitesse et de pression instantanés de l'écoulement moyen obtenus par la simulation à l'échelle microscopique et le modèle macroscopique

4.1.4 Vibrations sous écoulement transverse

Le faisceau de référence est en interaction avec un écoulement interstitiel gouverné par un courant stationnaire et unidirectionnel suivant (Ox). Sa configuration est similaire à celle de la Figure 2.10, et la Table 4.7 en regroupe les paramètres dimensionnels et adimensionnels. Vis-à-vis du cas test précédent (en *fluide initialement au repos*, voir section 4.1.3), on ne considère pas de structures *non-impulsées*: ici, l'ensemble des cylindres mobiles sont mis en mouvement par un même signal de force initial.

f_s	U_∞	Re	U_r
1,1 Hz	$1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$	100	0,91

TABLE 4.7 – Paramètres dimensionnels

Diversité des réponses vibratoires microscopiques

A l'instant initial ($t = 0$), le système est à l'équilibre : tous les cylindres du faisceau sont fixes et le fluide gouverné par un écoulement stationnaire de vitesse incidente U_∞ . Au cours de l'intervalle de temps $[0; t_{init}]$, un même signal de force harmonique est imposé à l'ensemble des cylindres de la *zone mobile*. Cette force entraîne les structures dans des oscillations, amorties au cours du temps par la présence du fluide interstitiel.

Les réponses vibratoires sont décrites pour différentes structures de la zone mobile du faisceau, dont les positions sont suffisamment éloignées les unes des autres pour identifier des comportements singuliers: les amplitudes de déplacements au cours du temps des tubes (6 x 9), (10 x 10) et (13 x 11), ainsi que leurs spectres, sont tracés sur les Figures 4.10 et 4.12.

Les amplitudes de déplacements des structures sollicitées sont identiques entre elles au cours du signal de force, soit pour $f_0.t \in [0; t_{init}]$. A partir de l'instant t_{init} , les amplitudes vibratoires des cylindres déplacés de leur position d'équilibre sont amorties au cours du temps, avec un taux d'amortissement ξ pouvant être différent d'une structure à l'autre, tel que le montre la Figure 4.10. Le paramètre d'amortissement ξ est évalué à partir de la formule (eq. 4.2). La variabilité des valeurs prises par ξ selon la position du cylindre est représentée sur le diagramme de la Figure 4.11.

Il apparaît au cours du temps une modulation de fréquence notable entre les oscillations des différentes structures mobiles. Cela se traduit sur le spectre des déplacements par des intensités différentes d'une structure à l'autre pour la fréquence *fondamentale* F_0 (Figure 4.12). La variabilité de l'intensité du fondamental selon la position du cylindre est représentée sur le diagramme de la Figure 4.13.

L'effet du courant stationnaire à $Re = 100$ est mis en évidence sur les diagrammes des Figures 4.13 et 4.11: il se traduit par une variation des taux d'amortissement et réponses fréquentielles structurelles vis à vis de celles obtenues en fluide initialement au repos.

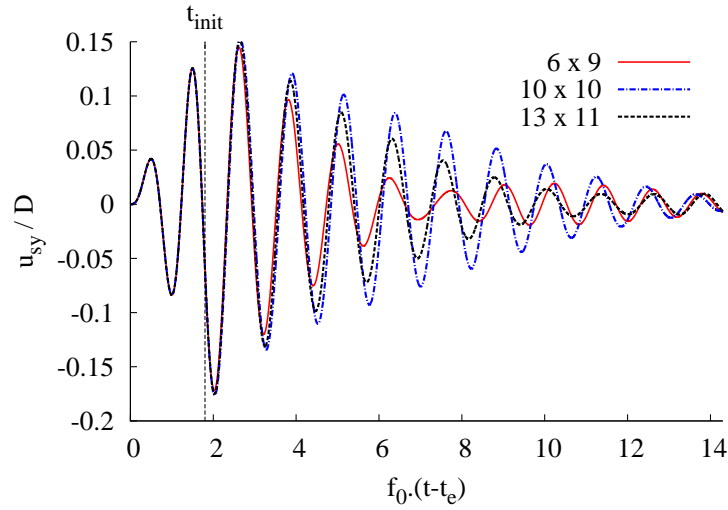


FIGURE 4.10 – Solutions microscopiques en déplacement u_{sy} de structures mobiles: sont représentées les réponses des structures (6 x 9), (10 x 10) et (13 x 11).

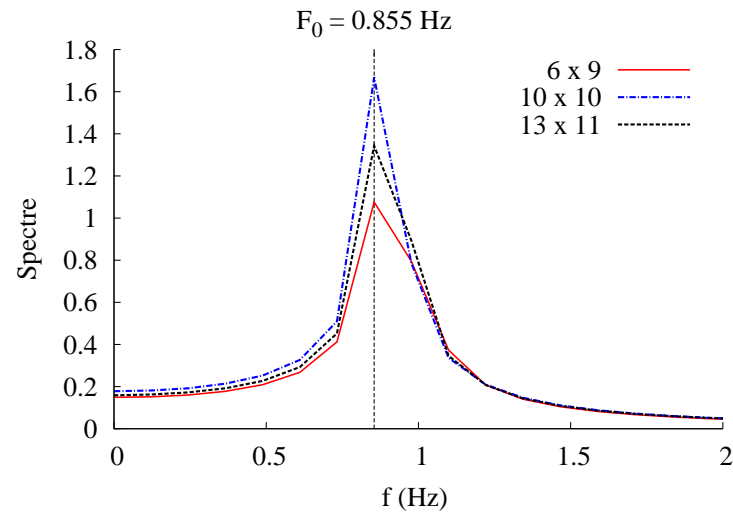


FIGURE 4.12 – Spectre des amplitudes de déplacement des structures mobiles (6 x 9), (10 x 10) et (13 x 11): la composante la plus intense des spectres correspond à la fréquence $F_0 = 0,86$ Hz.

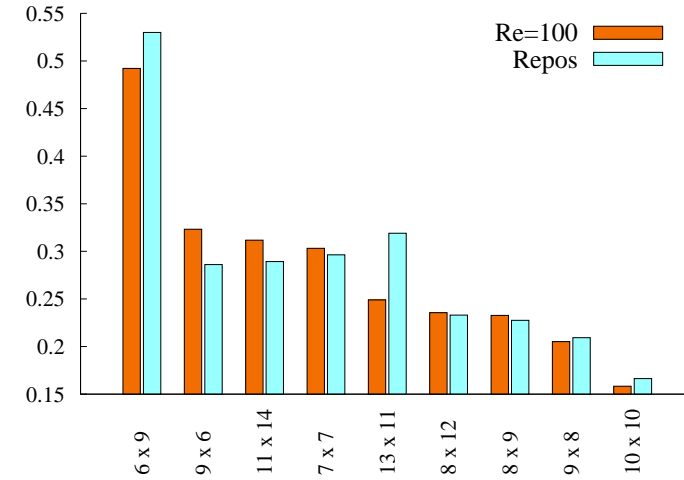


FIGURE 4.11 – Taux d'amortissement ξ suivant la position d'un cylindre mobile

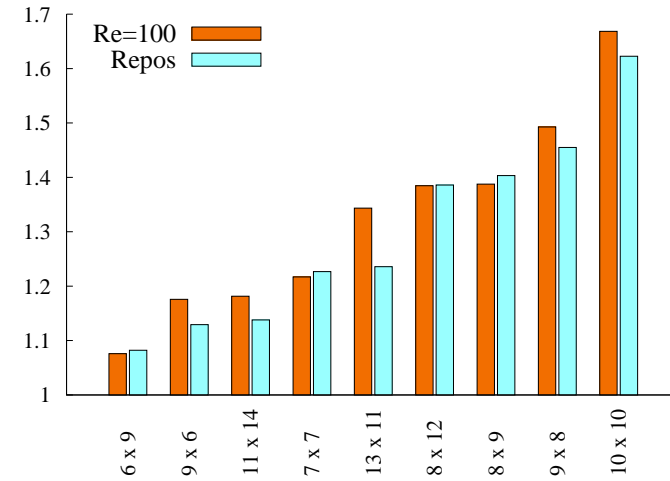


FIGURE 4.13 – Intensité du spectre des amplitudes de déplacement pour la composante fondamentale $F_0 = 0,86$ Hz.

Estimation des coefficients hydrodynamiques

Le régime vibratoire du faisceau considéré ici est **amorti**. Dans ce cas, le DDR retenu est (de nouveau) constitué d'un cylindre fixe, et d'un autre mobile (Figure 4.7). L'étude réalisée sur les coefficients hydrodynamiques (*Chapitre 2*) repose sur un faisceau de configuration identique à celui du présent cas d'étude, à l'exception que l'écoulement inter-tube est gouverné par un courant stationnaire de vitesse U_∞ , correspondant à un nombre de Reynolds $Re = 100$, et à une vitesse réduite $U_r = 0,91$. Les coefficients hydrodynamiques obtenus pour un tel écoulement sont reportés à la Table 4.8, et sont confrontés à ceux obtenus pour la configuration de référence où le fluide interstitiel est initialement au repos: on note un écart notable entre les deux estimations: cela rappelle la dépendance du chargement hydrodynamique au régime de l'écoulement (soit à Re) et/ou au régime vibratoire (soit à U_r), et donc, la nécessité d'effectuer une estimation préalable des coefficients pour chaque type de régimes dynamiques à considérer (voir *Chapitre 2*, section 2.4).

	C_{MF}	C_{LF}	C_{MS}	C_{LS}	C_D
Re = 100	1.68	4.83	1.50	4.55	0.87
Repos	1.65	5.08	1.42	4.88	—

TABLE 4.8 – *Coefficients hydrodynamiques*

Comparaison micro - macro

Les amplitudes de déplacement sont tracées au cours du temps pour quelques cellules de base, et représentées dans la Table 4.9. Pour l'ensemble des cellules observées, les déplacements calculés au cours du temps par le modèle macroscopique sont en bon accord avec ceux obtenus par la simulation à l'échelle microscopique.

Les diagrammes des Figures 4.14 et 4.15 représentent pour différentes cellules le taux d'amortissement ξ et l'amplitude maximale du spectre des déplacements, évaluant la capacité du modèle macroscopique à reproduire les réponses vibratoires individuelles de chaque structure. Ces graphes révèlent que le modèle macroscopique est sensible à la position des différentes structures au sein du faisceau et permet de restituer la diversité des réponses vibratoire du système de référence.

Pour le taux d'amortissement ξ , l'écart le plus important entre les simulations microscopique et macroscopique est observé pour le cylindre (8 x 9) et s'élève à 15.1 % ; et pour l'amplitude maximale du spectre de déplacement, l'écart le plus important est observé pour le même cylindre, s'élevant à 13.1 %.

La capacité du modèle macroscopique à prédire les réponses vibratoires propres à chaque cylindre du large faisceau reste néanmoins satisfaisante en présence d'un courant transverse.

Cela se justifie par une estimation adéquate des coefficients hydrodynamiques issue de la simulation microscopique sur domaine réduit (Table 4.8); et simultanément, par une résolution satisfaisante de la composante V_{fy} du champ de vitesse fluide mis en jeu dans le calcul des charges pariétales hydrodynamiques (car suivant 1DDL). La Table 4.10 représente l'évolution temporelle des intensités de la vitesse fluide moyenne V_{fy} au sein des mêmes cellules de base pour lesquelles les amplitudes de déplacements ont été précédemment observées (Table 4.9).

Les résultats du modèle macroscopique, en terme de vitesse fluides, sont en accord avec les résultats de la simulation microscopique, confirmant ainsi la consistance du modèle proposé.

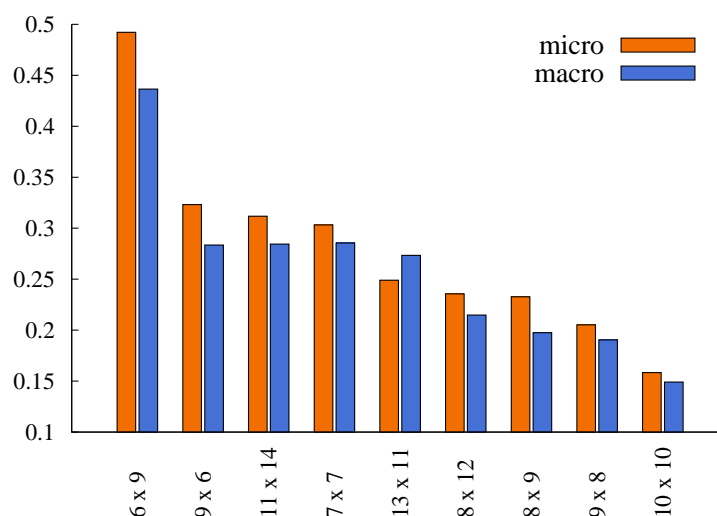


FIGURE 4.14 – Taux d'amortissement ξ_y suivant la position d'un cylindre mobile : comparaison entre les résultats des simulations à l'échelle microscopique et macroscopique.

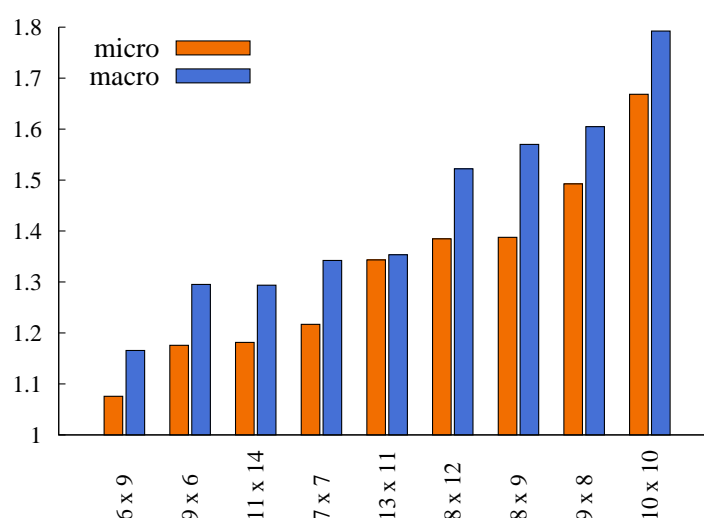


FIGURE 4.15 – Intensité du spectre des amplitudes de déplacement pour la composante fondamentale $F_0 = 0,86$ Hz : résultats des simulations aux échelles micro et macro.

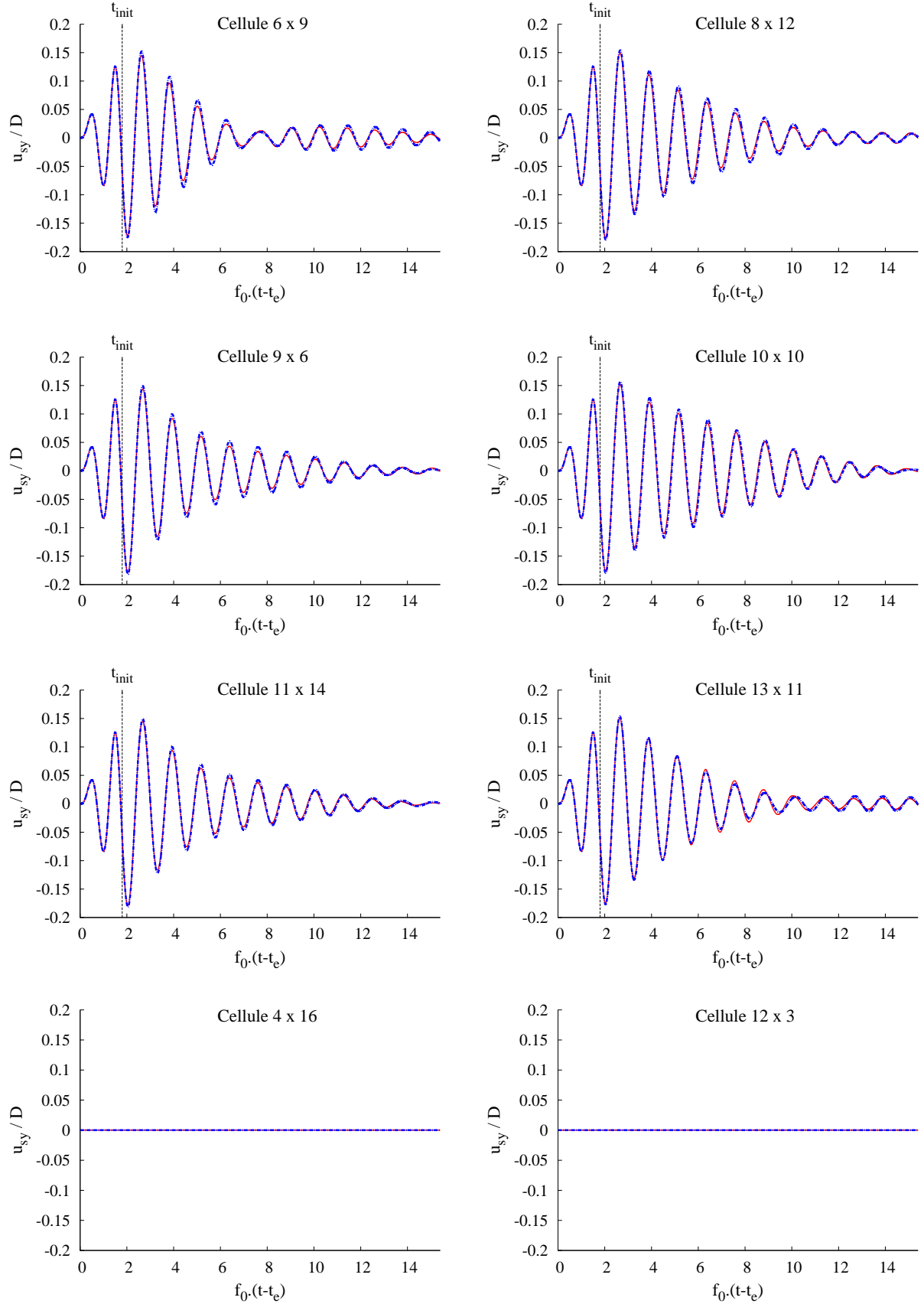


TABLE 4.9 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: ---. Les cylindres associés aux cellules (6 x 9), (8 x 12), (9 x 6), (10 x 10), (11 x 14) et (13 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des cellules (4 x 16) et (12 x 3) sont fixes.

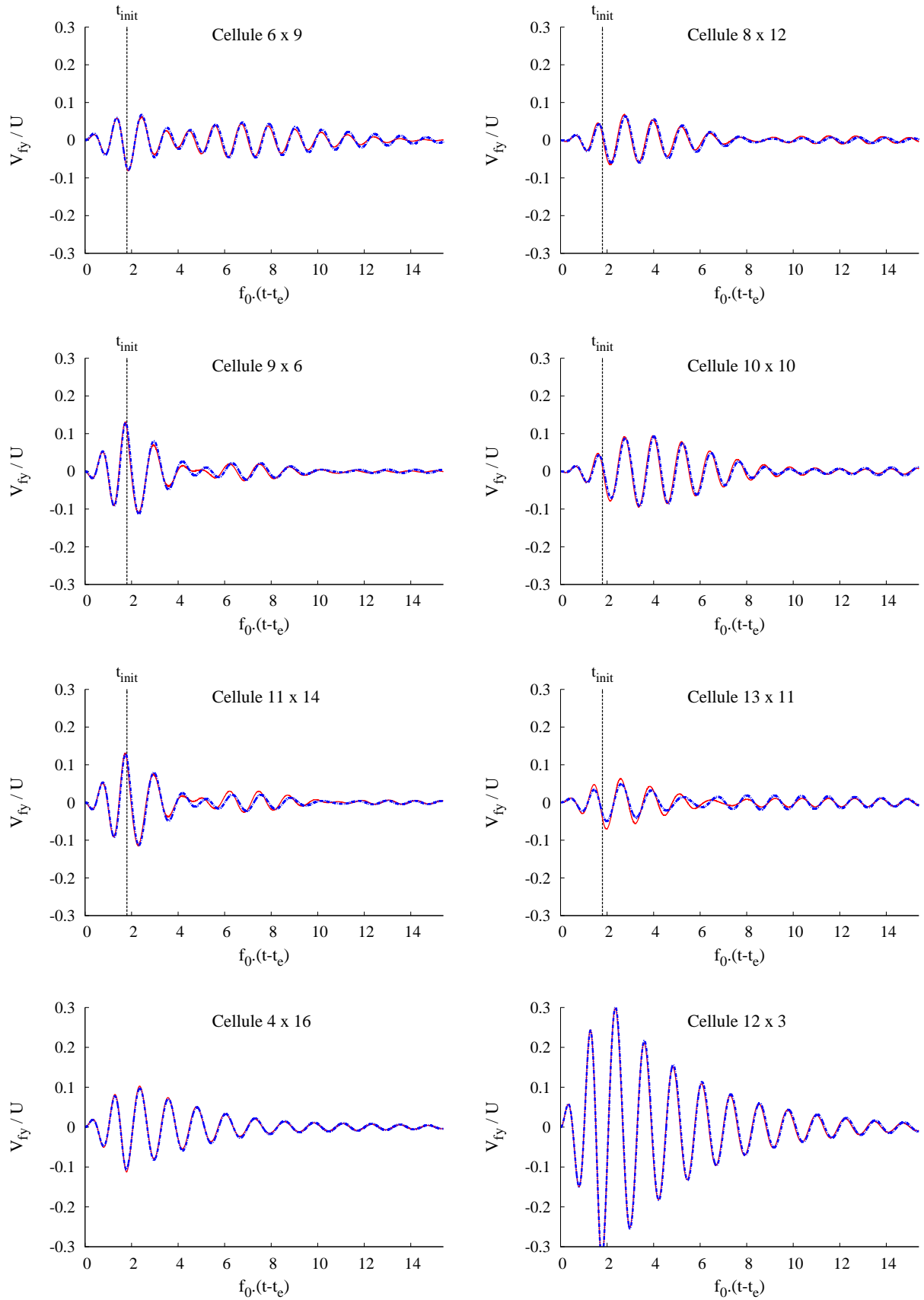


TABLE 4.10 – Comparaison entre les intensités de vitesse fluide $V_{fy} = (\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (6 x 9), (8 x 12), (9 x 6), (10 x 10), (11 x 14) et (13 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des cellules (4 x 16) et (12 x 3) sont fixes.

4.1.5 Vibrations à haute fréquence

Vis-à-vis du premier cas test où $f_s = 1,1 \text{ Hz}$ et $U_\infty = 0 \text{ m.s}^{-1}$ (voir section 4.1.3), on se place dans le cas particulier où $f_s = 4,0 \text{ Hz}$.

Diversité des réponses vibratoires microscopiques

La réponse vibratoire du faisceau de référence en interaction avec l'écoulement interstitiel et initialement au repos. Les réponses vibratoires sont décrites pour différentes structures de la zone mobile du faisceau, dont les positions sont suffisamment éloignées les unes des autres pour identifier d'éventuels comportements singuliers: sur les Figures 4.16 et 4.18 sont tracés, respectivement, l'évolution temporelle des amplitudes de déplacements des cylindres (6 x 9), (10 x 10) et (13 x 11), ainsi que leurs spectres.

Le paramètre ξ est calculé suivant (eq. 4.2), et la sensibilité de ses valeurs suivant la position du cylindre observé est représentée dans l'histogramme de la Figure 4.17. Le spectre des déplacements montre des intensités notablement différentes d'une structure à l'autre pour la fréquence *fondamentale* F_0 (Figure 4.18). La variabilité de l'intensité du fondamental selon la position du cylindre est représentée dans le diagramme de la Figure 4.19.

L'effet d'une augmentation de la fréquence propre des cylindres est mis en évidence sur les diagrammes des Figures 4.19 et 4.17: il se traduit par une variation notable des taux d'amortissement et des intensités spectrales vis à vis de celles obtenues pour $f_s = 1 \text{ Hz}$.

Estimation des coefficients hydrodynamiques

Le régime vibratoire du faisceau considéré ici est **amorti**. Dans ce cas, le DDR retenu est (de nouveau) constitué d'un cylindre fixe, et d'un autre mobile (Figure 4.7). Les coefficients hydrodynamiques obtenus pour $f_s = 4,0 \text{ Hz}$ sont reportés à la Table 4.11, et sont confrontés à ceux obtenus pour la configuration $f_s = 1,1 \text{ Hz}$: l'écart entre les deux estimations est significatif, ce qui confirme la dépendance du chargement hydrodynamique à la fréquence propre des structures, soit à la vitesse réduite U_r

	C_{MF}	C_{LF}	C_{MS}	C_{LS}	C_D
$f_s = 4,0 \text{ Hz}$	1.44	2.46	1.23	2.45	—
$f_s = 1,1 \text{ Hz}$	1.65	5.08	1.42	4.88	—

TABLE 4.11 – *Coefficients hydrodynamiques*

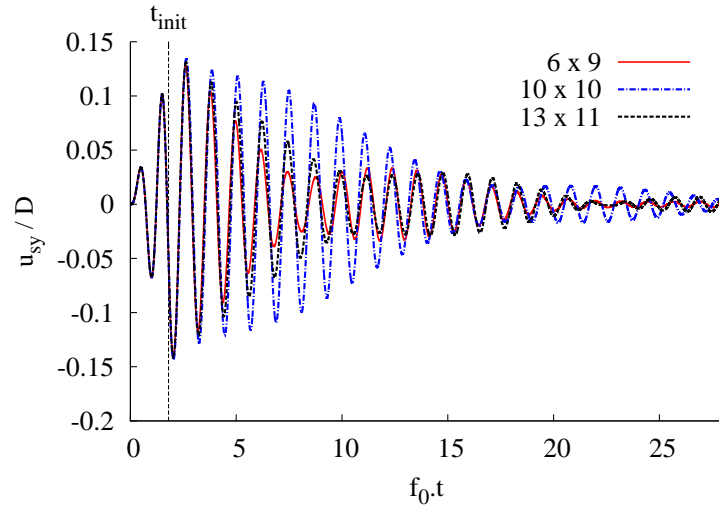


FIGURE 4.16 – Solutions en amplitude de déplacement A de la simulation à l'échelle microscopique : on représente les réponses vibratoires respectives des cylindres (6×9) , (10×10) et (13×11) .

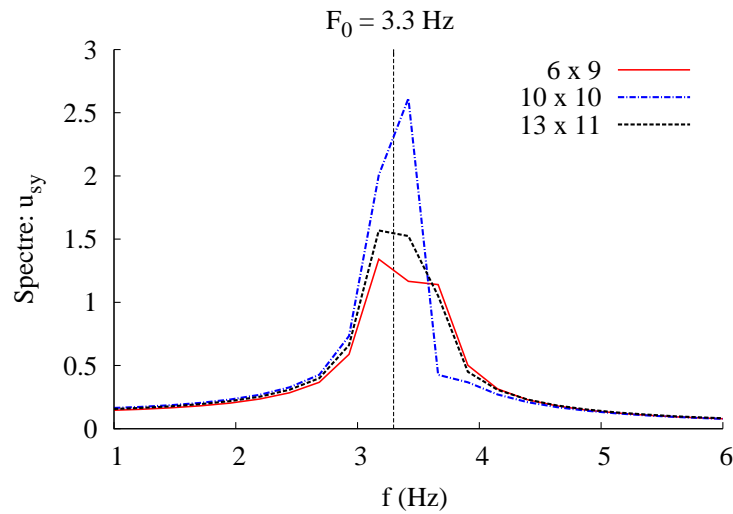


FIGURE 4.18 – Spectre des amplitudes de déplacement des cylindres (6×9) , (10×10) et (13×11) : la composante la plus intense de chaque spectre, correspond à la fréquence $F_0 = 3,3$ Hz.

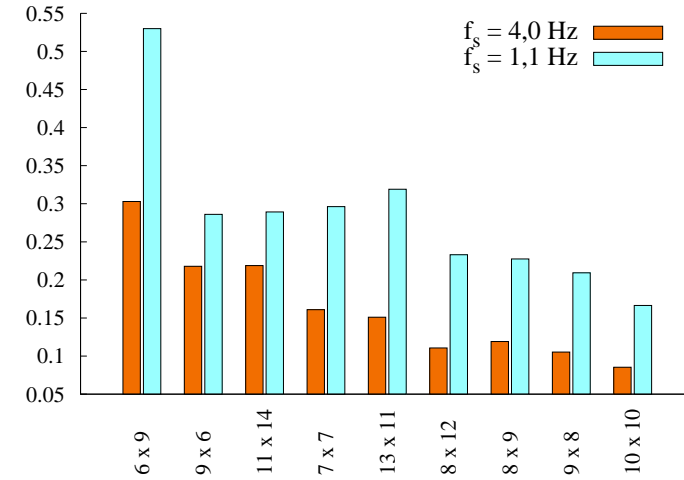


FIGURE 4.17 – Taux d'amortissement ξ suivant la position d'un cylindre mobile

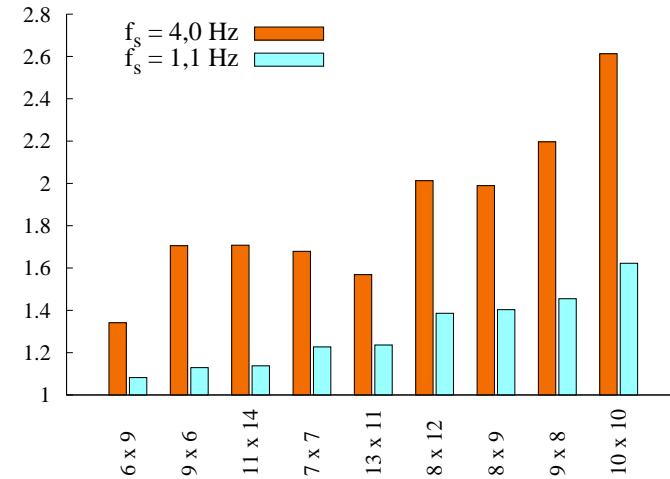


FIGURE 4.19 – Intensité du spectre des amplitudes de déplacement pour la composante fondamentale $F_0 = 3,3$ Hz.

Comparaison micro/macro

Les amplitudes de déplacement sont tracées au cours du temps pour quelques cellules de base, et représentées dans la Table 4.12. Pour l'ensemble des cellules observées, les déplacements calculés au cours du temps par le modèle macroscopique sont en bon accord avec ceux obtenus par la simulation à l'échelle microscopique.

Les diagrammes des Figures 4.20 et 4.21 représentent pour différentes cellules le taux d'amortissement ξ et l'amplitude maximale du spectre des déplacements, évaluant la capacité du modèle macroscopique à reproduire les réponses vibratoires individuelles de chaque structure. Ces graphes révèlent que le modèle macroscopique est sensible à la position des différentes structures au sein du faisceau et permet de restituer la diversité des réponses vibratoire du système de référence. Pour le taux d'amortissement ξ , l'écart le plus important entre les simulations microscopique et macroscopique est observé pour le cylindre (10 x 10) et s'élève à 10.3 % ; et pour l'amplitude maximale du spectre de déplacement, l'écart le plus important est observé de nouveau pour le cylindre (10 x 10) et s'élève à 21.3%.

La capacité du modèle macroscopique à prédire les réponses vibratoires propres à chaque cylindre du large faisceau reste satisfaisante pour une fréquence propre plus importante. Cela se justifie par une estimation adéquate des coefficients hydrodynamiques issue de la simulation microscopique sur domaine réduit (Table 4.11) ; et simultanément, par une résolution satisfaisante de la composante V_{fy} du champ de vitesse fluide mis en jeu dans le calcul des charges pariétales hydrodynamiques. La Table 4.13 présente l'évolution temporelle des intensités de la vitesse fluide moyenne V_{fy} au sein des mêmes cellules de base pour lesquelles les amplitudes de déplacements ont été précédemment observées (Table 4.12). Les résultats du modèle macroscopique, en terme de vitesse fluides, sont en accord avec les résultats de la simulation microscopique, traduisant ainsi la robustesse du modèle proposé.

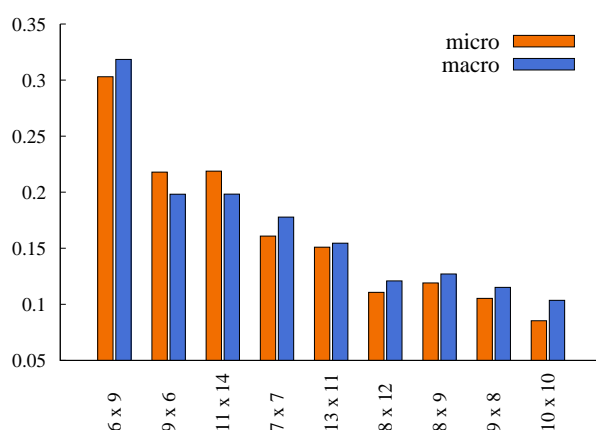


FIGURE 4.20 – Taux d'amortissement ξ_y suivant la position d'un cylindre mobile.

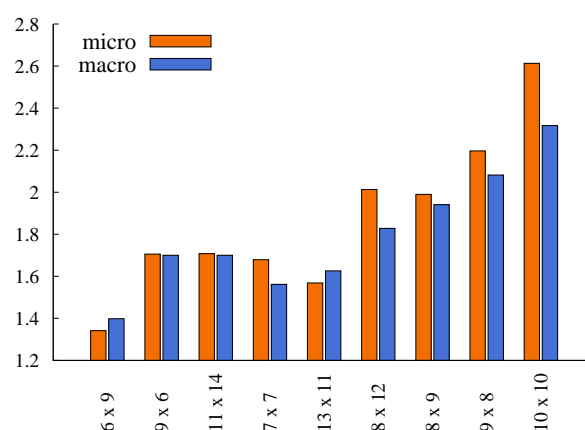


FIGURE 4.21 – Intensité du spectre des amplitudes de déplacement pour F_0 .

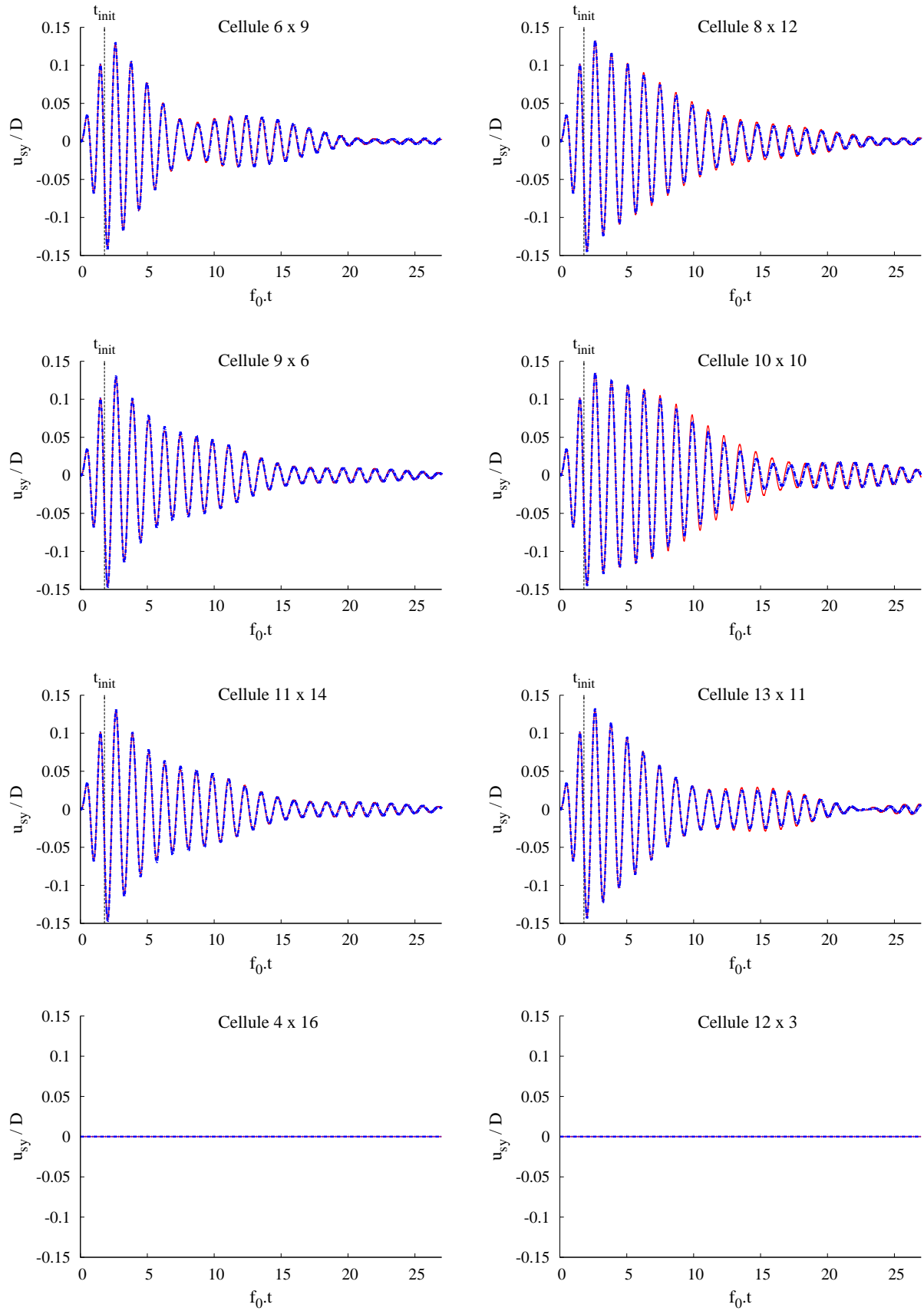


TABLE 4.12 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (6 x 9), (8 x 12), (9 x 6), (10 x 10), (11 x 14) et (13 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des cellules (4 x 16) et (12 x 3) sont fixes.

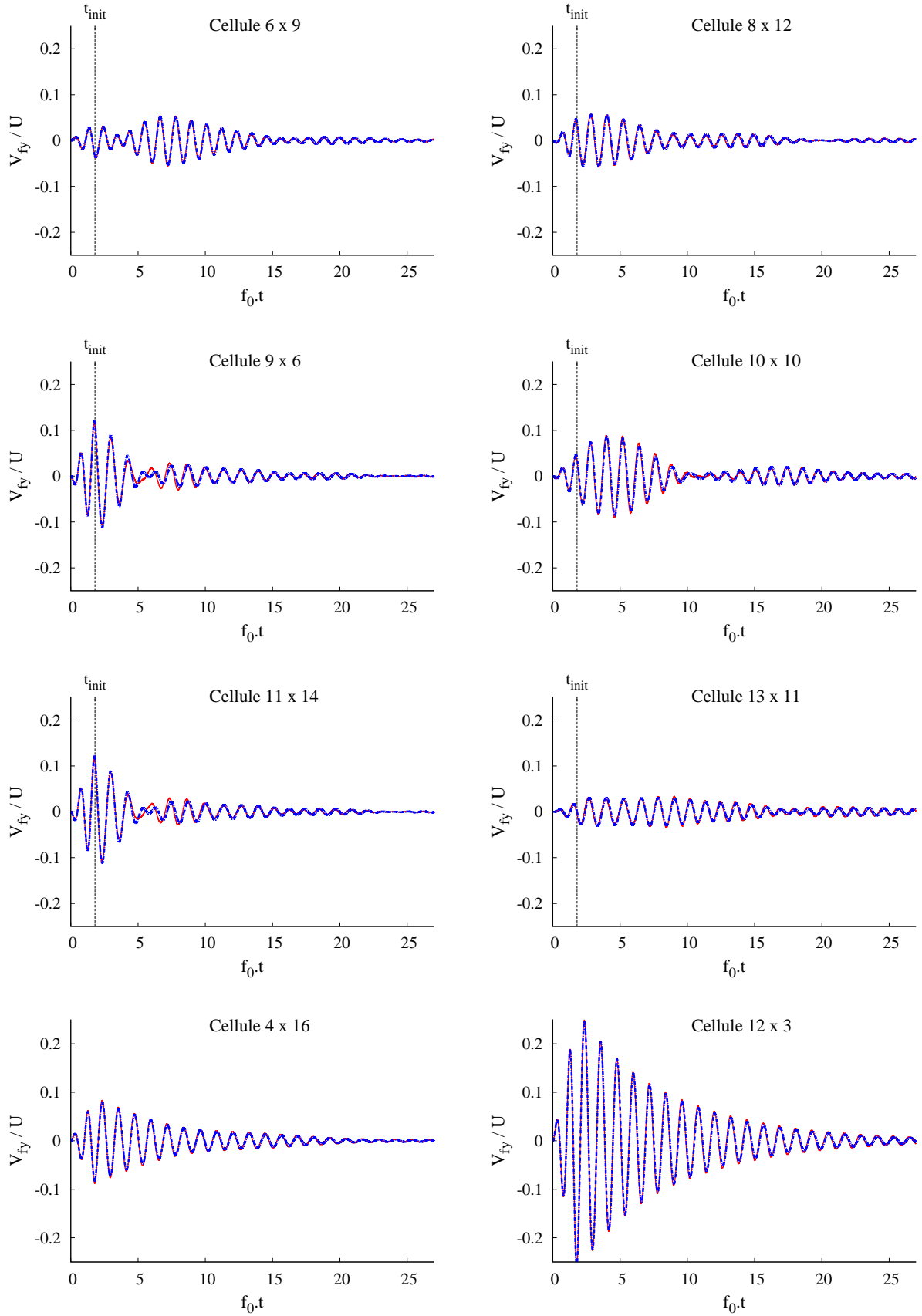


TABLE 4.13 – Comparaison entre les intensités de vitesse fluide $V_{fy} = (\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (6 x 9), (8 x 12), (9 x 6), (10 x 10), (11 x 14) et (13 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des cellules (4 x 16) et (12 x 3) sont fixes.

4.2 Faisceau de tubes hexagonaux

L'homogénéisation est appliquée aux faisceaux constitués de structures de sections droites hexagonales. De même que pour l'application aux tubes cylindriques, il s'agit de décrire les vibrations de chaque structure élémentaire en réponse à une sollicitation extérieure.

Dans la suite, les hypothèses vérifiées par le problème homogénéisé et l'écriture du modèle de force hydrodynamique sont adaptées à la géométrie hexagonale. Ensuite, les capacités du modèle macroscopique à reproduire les interactions fluide-solide au sein de ce système sont évaluées pour des déplacements suivant 1 DDL.

Les réponses vibratoires des structures sont étudiées en interaction avec un écoulement initialement au repos, dont la nature du fluide est proche de celle du sodium liquide à 500C ; et la nature du matériau solide vérifie des propriétés mécaniques équivalentes à celles d'un assemblage combustible du cœur PHÉNIX (considéré de comme une poutre).

4.2.1 Adaptation du problème homogénéisé

Hypothèses

DÉCOMPOSITION DU SYSTÈME HÉTÉROGÈNE Le système hétérogène considéré représente un arrangement de tubes à section hexagonale, tous identiques entre-eux et disposés, à l'état de repos du système, suivant un pas triangulaire. Le domaine d'étude est divisé en un nombre fini de cellules de base vérifiant l'hypothèse $H1$ introduite au *Chapitre 1*. Toute cellule de base Ω est constituée d'une seule et même structure hexagonale, de sorte que la description au cours du temps des mouvements d'une structure donnée soit associée à l'observation d'un seul et même volume de contrôle. Les fractions volumiques de phases fluide ϕ_f et solide ϕ_s sont constantes au cours du temps. Il en est de même pour les fractions surfaciques qui vérifient en particulier $\varepsilon_s = 0$ et $\varepsilon_f = 1$. Le "découpage" du domaine en volumes réguliers est représenté à la Figure (4.22).

PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DE L'ÉCOULEMENT Le domaine fluide associé à la structure d'une cellule de base Ω est désigné Ω_f . Toute la matière fluide du système hétérogène est monophasique. Les écoulements inter-tubes considérés sont incompressibles, visqueux et laminaires. Les éventuelles forces volumiques et intrinsèques à l'écoulement (telles que l'action de la pesanteur) sont négligées.

PROPRIÉTÉS ET COMPORTEMENTS MÉCANIQUES DES STRUCTURES Le domaine solide associé à la structure d'une cellule de base Ω est désigné Ω_s . Le problème est posé de sorte que chaque cellule de base puisse restituer les réponses vibratoires d'une seule structure donnée ; pour ce faire, les amplitudes de déplacement de toute structure sont limitées par les frontières du volume de contrôle qui lui est associé Ω .

Toute structure du système hétérogène est supposée rigide : les déformations en flexion sont négligées et la section droite est indéformable. De ce fait, on choisit d'assimiler leur comportement dynamique à celui d'un *oscillateur harmonique*. En particulier, on leur attribue un comportement *non-amorti dans le vide* afin de mettre au mieux en évidence les effets d'amortissement liés à l'écoulement, avec des matrices de masse $\bar{\bar{M}}$, et de raideur $\bar{\bar{K}}$. Tout cylindre Ω_s vérifie alors :

$$\bar{\bar{K}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \bar{\bar{K}} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (4.3)$$

où \mathbf{u}_s représente le déplacement de Ω_s par rapport à Ω , et \mathbf{F} sont les forces hydrodynamiques s'exerçant sur la structure Ω_s .

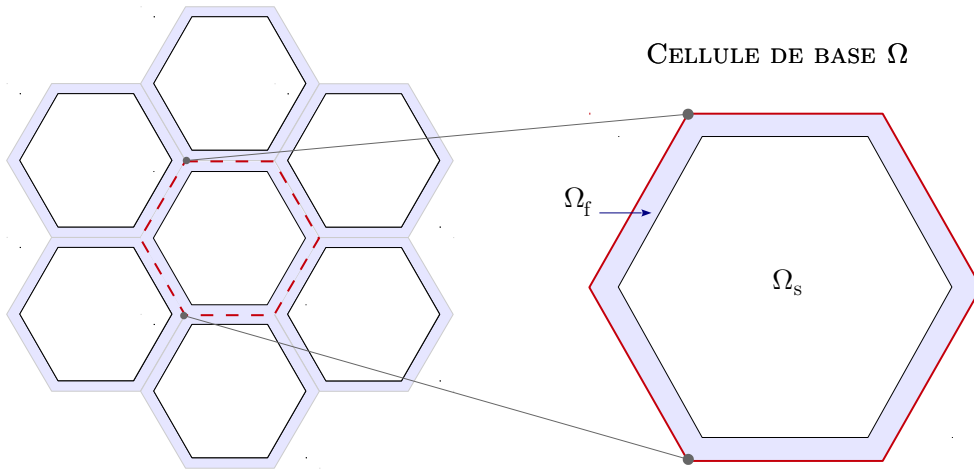


FIGURE 4.22 – Chaque cellule de base représente la présence d'une structure et de l'écoulement proche paroi, dans la limite d'un volume hexagonal, identifiée ici par une frontière extérieure rouge.

Modèle de charges hydrodynamiques

Le modèle de force retenu pour un cylindre est adapté à une structure élancée de section hexagonale. Pour cela, les paramètres géométriques correspondant à la section droite d'un cylindre sont remplacés par ceux relatifs à une section hexagonale ; à savoir :

$$\frac{\pi D^2}{4} \rightarrow 3L^2 \quad \text{et} \quad D \rightarrow \sqrt{3}L$$

où L représente la longueur d'une arête d'un hexagone. Le modèle prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & 3\rho_f dz L^2 \left[(1 + \mathbf{C}_{MF}) \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} - \mathbf{C}_{MS} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} \right] \\ & + \frac{1}{2} \rho_f dz \sqrt{3}L U [\mathbf{C}_{LF}(\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_\infty) - \mathbf{C}_{LS}\mathbf{V}_s] + \frac{1}{2} \rho_f dz \sqrt{3}L \mathbf{C}_D |\mathbf{v}_\infty| \mathbf{v}_\infty \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2.2 Système de référence microscopique

Paramètres géométriques et mécaniques

On simule numériquement les réponses vibratoires d'un faisceau constitué de **91 tubes** de section hexagonale et disposés en "nids d'abeilles" suivant **5 couronnes** tel que le représente la figure 4.23. Le système considéré présente deux zones distinctes (Figure 4.1) :

- une **zone mobile** constituée de la 1ère couronne de tubes.
- une **zone fixe** en périphérie de la zone mobile est constituée des 72 autres tubes du faisceau, tous maintenus fixes.

La figure 4.23 définit également le système de numérotation retenu pour identifier les différentes structures (ou cellules de base) du faisceau.

a (mm)	e (mm)	U (m.s ⁻¹)	f_s (Hz)	μ (Pa.s)	ρ_f (kg.m ⁻³)	ρ_s (kg.m ⁻³)	m^*	P^*
70,0	4,0	$1,8.10^{-1}$	3,0	$0,24.10^{-3}$	$0,833.10^3$	$56,0.10^3$	56,0	1,03

TABLE 4.14 – Données géométriques et mécaniques du domaine matériel

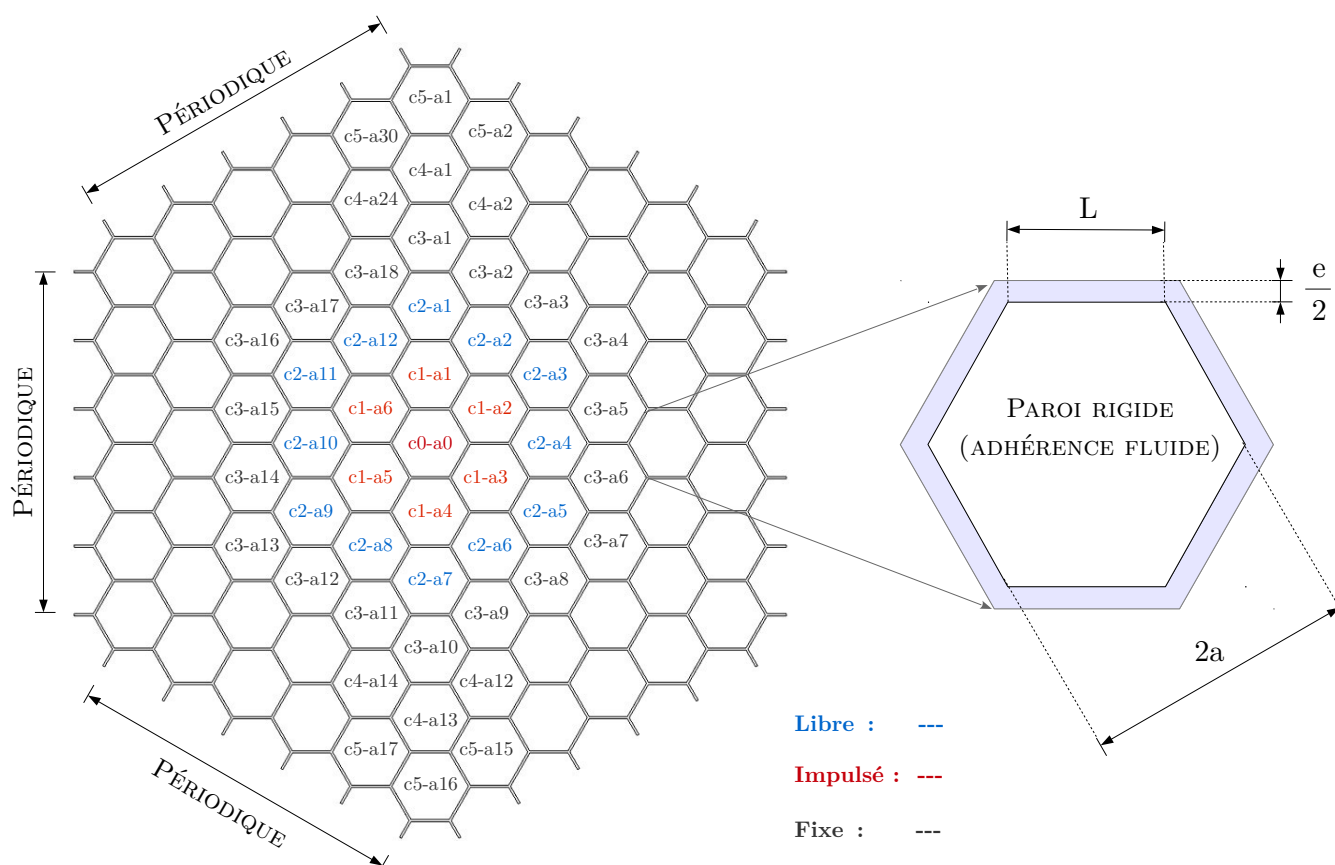


FIGURE 4.23 – *Faisceau de référence et système de numérotation des structures* : Le faisceau est constitué de 91 tubes hexagonaux. Chaque structure est identifiée par sa position $(c_i - a_j)$, de la i^{me} couronne et du j^{me} azimuth, pour tout couple d'entiers $(i ; j) \in [0; 6] \times [0; 6i]$.

Paramètres numériques

MAILLAGE Le maillage du domaine entier est construit à partir de la discrétisation d'une cellule de base que l'on translate périodiquement suivant le pas du faisceau $P = H + e$.

Le critère de raffinement consiste à assurer un minimum d'éléments dans l'épaisseur de la couche limite désignée par δ . L'estimation de δ dépend du régime de l'écoulement auquel est soumis la structure. Pour une structure oscillante et immergée dans un fluide au repos, l'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de Stokes et vérifie le critère suivant (*approximation de la plaque oscillante*) :

$$\delta \leq \delta_{St} \quad \text{avec} \quad \delta_{St} = \frac{e}{2\sqrt{\pi St/2}}$$

On choisit de se restreindre à une gamme de nombres de Stokes vérifiant $St \leq 50$, avec $St = \frac{f_s e^2}{4 \nu}$

Dans cette limite, l'estimation la plus pénalisante de δ est telle que $\delta \leq 0,1 \frac{e}{2}$. On choisit un raffinement de la zone inter-tube tel que l'épaisseur de couche limite est composée d'un minimum de $N_\delta = 4$ éléments, de taille minimale Δx_r ; on assure un nombre d'éléments N_θ autour de la paroi tel que $N_\theta \approx \pi D / \Delta x_\theta$, avec $\Delta x_\theta \approx 2\Delta x_r$.

Le maillage finalement obtenu compte 25 200 éléments par cellule de base, soit 2 721 600 éléments pour le domaine entier, et la Figure 4.24 permet de visualiser sa finesse.

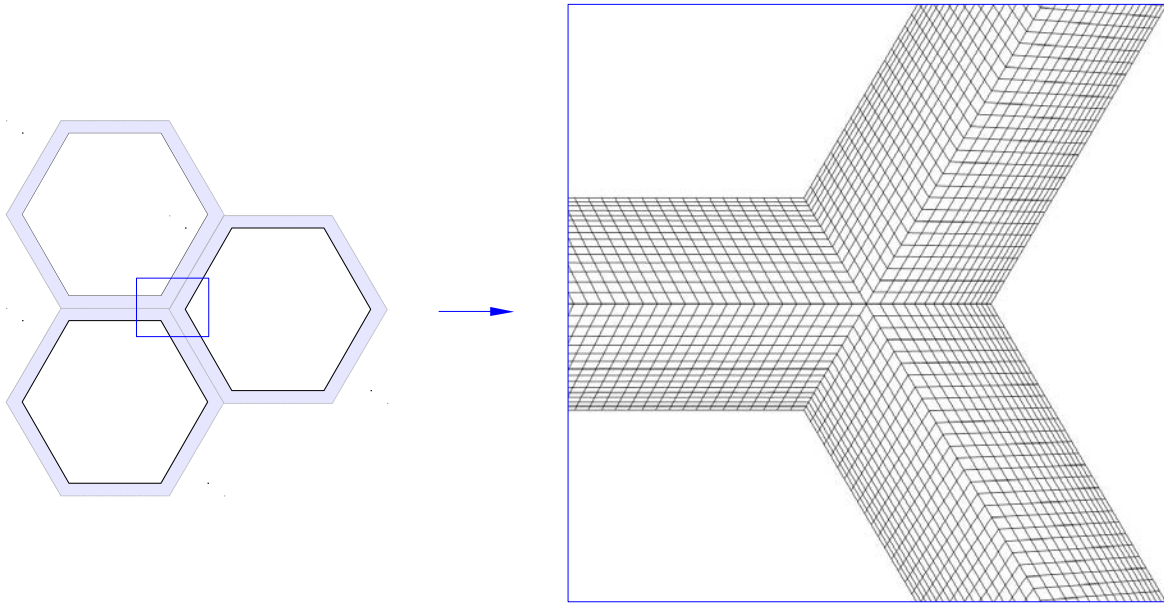


FIGURE 4.24 – *Maillage microscopique au voisinage d'une interface fluide-structure*

PAS DE TEMPS Le pas de temps retenu dépend de la condition CFL suivante :

$$U \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

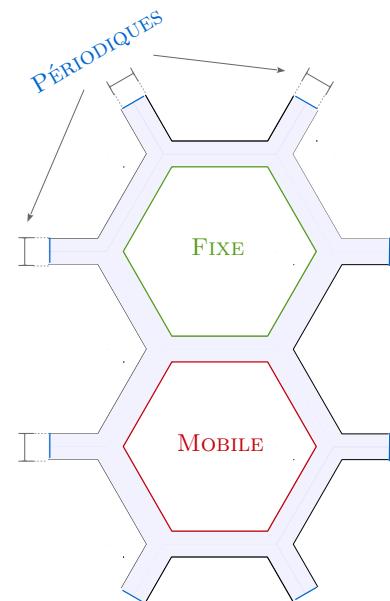
Le raffinement en maillage retenu nécessite ainsi un pas de temps vérifiant $\Delta t \leq 6,0.10^{-5}$ s. Par ailleurs, dans le cadre de ces travaux, les simulations ALE sont réalisées pour un pas de temps identique pour les solveurs fluide et structure. Pour $\Delta t = 5,0.10^{-5}$ s, les réponses structurelles sont calculées avec près de 6700 points ; ce qui est satisfaisant pour une description fiable.

CONDITIONS AUX LIMITES Pour toutes les configurations traitées les frontières extérieures du domaine (*haute, basse, gauche et droite*) sont affectées de conditions numériques *périodiques* : ce choix permet de simuler un domaine "*infini*" et de se prémunir d'éventuels effets de bord pouvant perturber la solution de l'écoulement. Les bords hexagonaux représentant les interfaces fluide-structure sont définis numériquement comme des parois rigides, vérifiant la condition d'adhérence pour le fluide (Figure 4.23).

4.2.3 Mise en données du problème homogénéisé

Estimation des coefficients hydrodynamiques

Le système d'équations macroscopique met jeu 5 coefficients dont les valeurs sont estimées à partir de la solution de l'écoulement microscopique dans un domaine réduit représentatif (DRR). La méthode d'estimation des coefficients est décrite en configuration de faisceau cylindrique (*Chapitre 3, section 2.5*). Le régime vibratoire du système de référence est **amorti**. Pour ce régime, un DRR constitué d'un tube fixe et d'un autre mobile se montre représentatif de la dynamique du système de référence: nous proposons ainsi de conserver cette configuration pour le présent problème mettant en jeu des structures hexagonales (voir Figure ci-contre). La même méthode de régression linéaire multiple est appliquée pour estimer les coefficients hydrodynamiques, reportés à la Table 4.15.



Configuration DRR

C_{MF}	C_{LF}	C_{MS}	C_{LS}	C_D
0.97	1.27	1.75	2.38	—

TABLE 4.15 – Coefficients hydrodynamiques

Paramètres numériques macroscopiques

MAILLAGE Afin de garantir une estimation adéquate des *gradients macroscopiques* au voisinage d'une singularité, nous avons mis en évidence la nécessité de décomposer chaque cel-

lule de base en un nombre de mailles au moins égal à deux suivant chaque direction de l'espace (*Chapitre 3*, section 3.4.2). De plus, l'expérience montre que les méthodes numériques de *Code_Saturne* sont davantage robustes avec des maillages hexaédriques. Pour les cellules de formes hexagonales, on opte donc pour décomposition en un minimum de quadrilatères pour adapter au mieux le domaine de calcul aux schémas du solveur utilisé.

De ce fait, le maillage du domaine macroscopique est tel que chaque cellule de base présente un raffinement de l'ordre de 3 fois $m \times m$, où m définit le nombre d'éléments sur la segmentation de référence $m = 1$. La figure 4.25 illustre trois possibilités de décomposition d'une cellule de forme hexagonale. Pour notre cas d'application, nous optons pour un raffinement correspondant à $m = 2$; soit 12 éléments par cellule de base "entières" , ou 1 356 éléments pour le domaine entier. La figure 4.26 permet de visualiser l'allure du maillage macroscopique retenu. Les solutions obtenues à l'échelle d'une maille sont moyennées sur chaque cellule de base afin de rendre leur niveau d'observation spatial conforme à celui de l'échelle macroscopique (*cf. Décomposition des cellules de base Ω_i* , section 3.4.2).

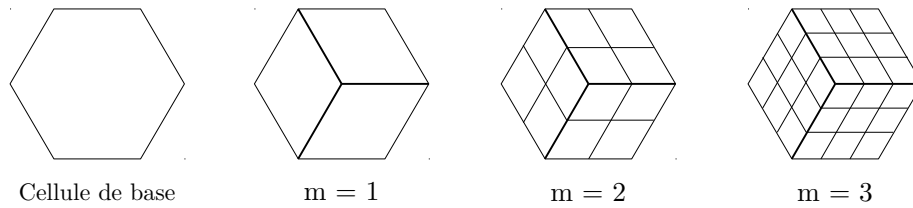


FIGURE 4.25 – *Discretisation d'une cellule de base en 3 fois $m \times m$ mailles hexaédriques*

PAS DE TEMPS Le domaine de calcul macroscopique présente des mailles bien plus grandes que celles du domaine microscopique ; ce qui entraîne immédiatement une condition CFL moins restrictive. Le pas de temps macroscopique est donc choisi afin de garantir un minimum de 400 points par périodes d'oscillation lors du calcul des réponses vibratoires. Cela revient donc à $\Delta t = 0,8 \cdot 10^{-3}$ s.

CONDITIONS AUX LIMITES Similairement aux conditions de calcul microscopique, les frontières extérieures du domaine sont affectées de conditions numériques *périodiques*.

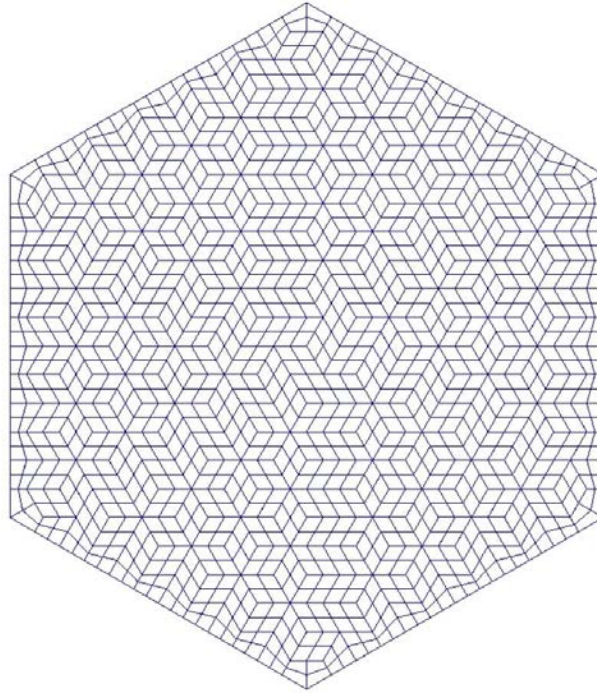


FIGURE 4.26 – *Maillage macroscopique : Le domaine macroscopique est construit à partir du raffinement $m = 2$.*

4.2.4 Comparaison micro/macro

Diversité des réponses vibratoires

La réponse vibratoire du faisceau de référence en interaction avec l'écoulement interstitiel et initialement au repos - soit $\mathbf{v}_\infty = \vec{0}$ -, est simulé numériquement à l'échelle microscopique. Chaque structure appartenant aux couronnes c_0 , c_1 et c_2 se déplace suivant **1 degré de liberté** (celui de la direction (Oy)).

A l'instant initial ($t = 0$), le système est à l'équilibre : toutes les structures sont fixes et le fluide au repos. Au cours de l'intervalle de temps $[0; t_{init}]$, un même signal de force harmonique est imposé à l'ensemble des structures impulsées appartenant aux couronnes c_0 et c_1 (Figure 4.23). Leurs oscillations se caractérisent par un mouvement de **battement**, comme l'illustre la réponse en déplacement du tube ($c_0 - a_0$) tracée sur la Figure 4.27. Ce phénomène traduit un couplage entre des fréquences de valeurs proches, tel que le montre le spectre en déplacement de ($c_0 - a_0$) tracé sur la Figure 4.28: les fréquences du battement sont estimées à $f_0 = 2,90$ Hz et $f_1 = 2,59$ Hz.

Vis-à-vis des résultats obtenus en configuration cylindrique, ce comportement vibratoire révèle la complexité des interactions fluide-structure induite par le fort confinement des tubes hexagonaux. La durée de la simulation ne permet pas d'observer, comme attendu,³ l'amortisse-

3. Le fluide est initialement au repos et n'est pas gouverné par un courant stationnaire, ce qui n'est pas favorable à des vibrations auto-entretenues. Par ailleurs, le temps de calcul de cette simulation microscopique est de l'ordre de la journée pour 1 période d'oscillation ; des signaux temporels plus longs étaient ainsi hors de portée.

ment des oscillations au cours du temps ; le facteur d'amortissement n'est donc pas évalué.

La dynamique du système se caractérise par une variété de réponses parmi les tubes mobiles, comme l'illustrent les déplacements des tubes $(c_0 - a_0)$ et $(c_2 - a_2)$ tracés sur la Figure 4.27, ainsi que leurs spectres respectifs sur la Figure 4.28 . La diversité des réponses est due aux différents types de sollicitations pouvant mettre une structure donnée en mouvement (forces extérieures ou charges hydrodynamiques seules), et aussi à la position de cette dernière au sein du système. Ce dernier point est mis en évidence sur les Figures 4.29 et 4.30, montrant des réponses notablement différentes entre deux tubes mis en mouvement par le même signal de force: les déplacements des structures $(c_0 - a_0)$ et $(c_1 - a_1)$ sont initialement identiques, puis se distinguent progressivement à partir de l'instant t_{init} succédant l'impulsion initiale.

La taille des signaux temporels obtenus ne permet pas d'enrichir davantage les spectres des réponses en déplacement, ce qui induit une difficulté à identifier avec précision les deux modes gouvernant le battement des structures. En effet, le pas fréquentielle utilisé pour la FFT est $\Delta f = 0,153$ Hz, ce qui est peu précis pour restituer l'ensemble des modes gouvernant. De ce fait, on se réfère essentiellement à l'allure des signaux temporels pour évaluer les capacités prédictives du modèle macroscopique.

Résultats

Les amplitudes de déplacement sont tracées au cours du temps pour quelques cellules de base et représentées dans la Table 4.16. Pour chaque cellule observée, les déplacements calculés au cours du temps par le modèle macroscopique présentent un phénomène de battement, conformément aux résultats de la simulation microscopique.

Les différences d'allure observées entre les battements microscopique et macroscopique traduisent des écarts entre les couples de fréquences $(f_0 ; f_1)$ qui gouvernent chacune de ces réponses. Les spectres en déplacement sont tracés par cellule, à la Table 4.17. Le modèle macroscopique restitue les modes dominants de certaines structures $(c_0 - a_0, c_1 - a_2, c_2 - a_1, c_2 - a_3)$ ou encore $c_2 - a_4$.

La modulation de l'enveloppe des battements obtenue par le calcul micro est bien restituée par le modèle macro, et ceci, pour différentes cellules de base: cela est valable aussi bien pour les champs de déplacements (Table 4.16) que pour la vitesse moyenne fluide (Table 4.18), et traduit la sensibilité du modèle à la position de chaque structure au sein du faisceau.

Pour des structures hexagonales, la capacité du modèle macroscopique à prédire les réponses vibratoires individuelles au sein d'un large faisceau reste encourageante.

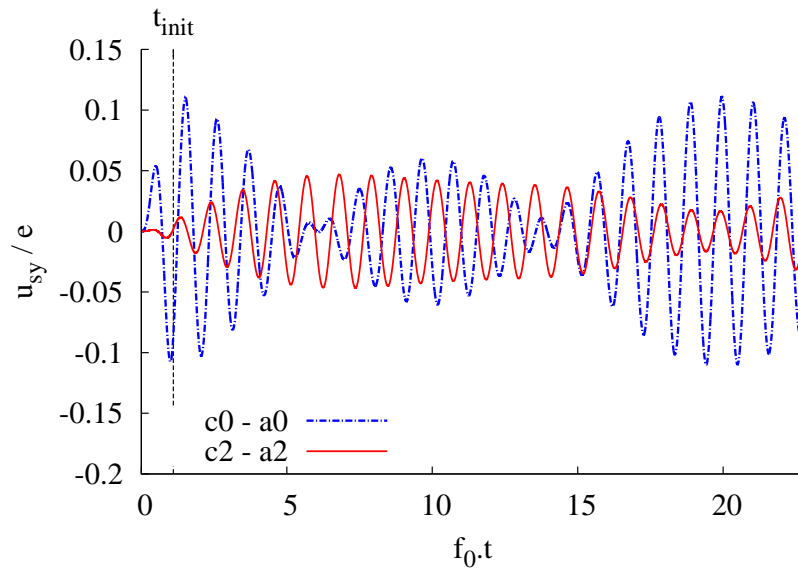


FIGURE 4.27 – Amplitude de déplacement u_{sy} de la simulation à l'échelle microscopique : on représente les réponses vibratoires respectives des structures $(c_0 - a_0)$ et $(c_2 - a_2)$.

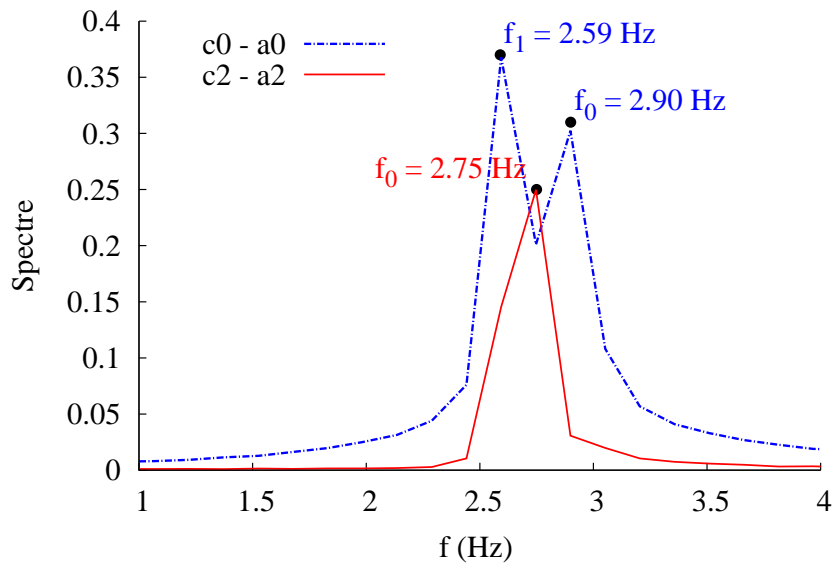


FIGURE 4.28 – Spectre des déplacements des structures $(c_0 - a_0)$ et $(c_2 - a_2)$: la composante la plus intense de chaque spectre diffère suivant la structure considérée.

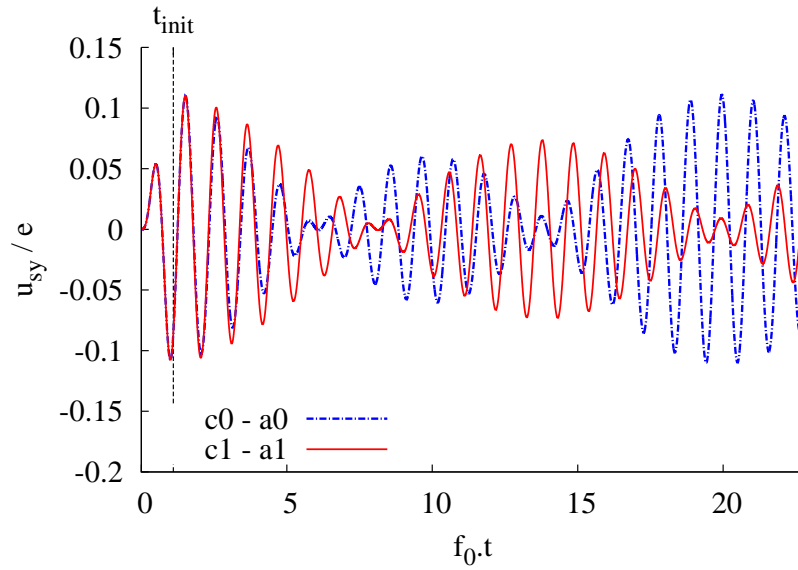


FIGURE 4.29 – Amplitude de déplacement u_{sy} de la simulation à l'échelle microscopique : on représente les réponses vibratoires respectives des structures $(c_0 - a_0)$ et $(c_1 - a_1)$.

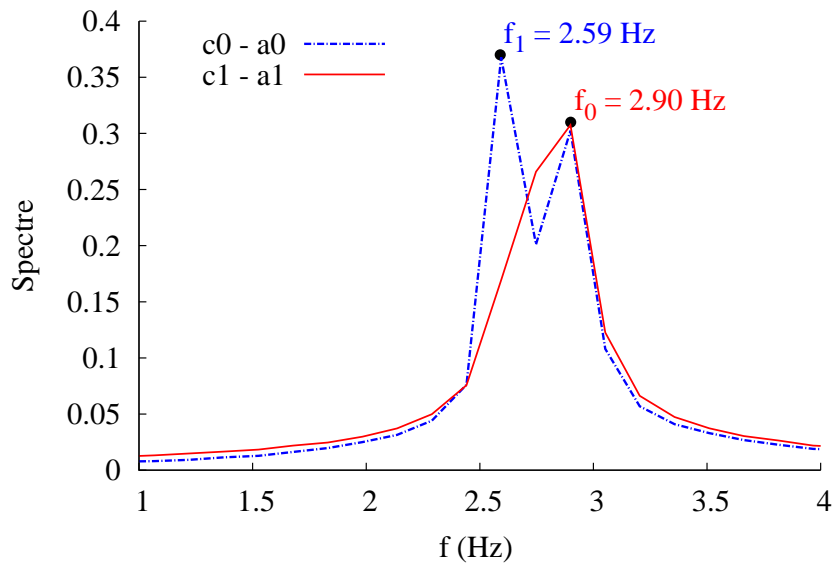


FIGURE 4.30 – Spectre des déplacements des structures $(c_0 - a_0)$ et $(c_1 - a_1)$: la composante la plus intense de chaque spectre diffère suivant la structure considérée.

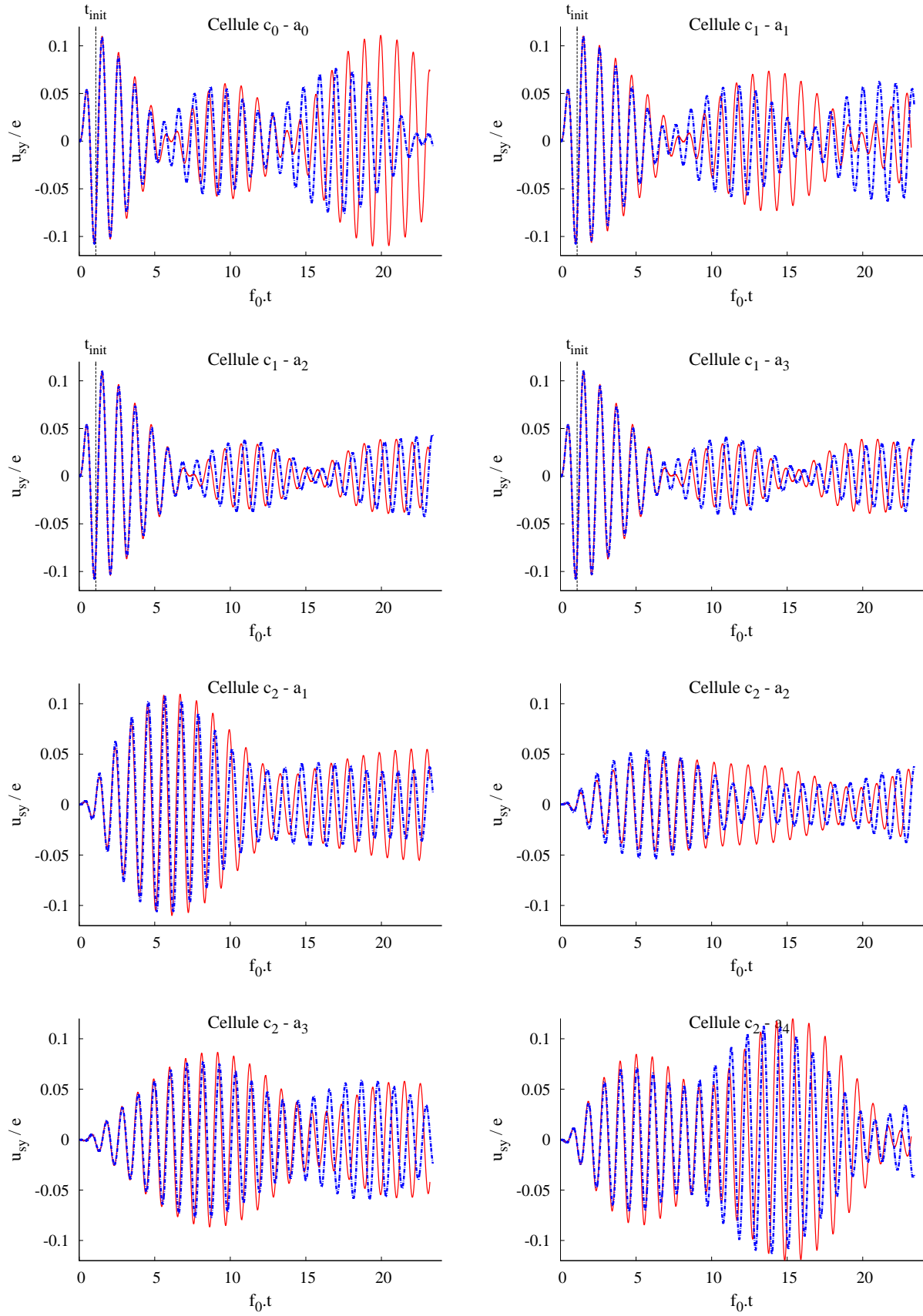


TABLE 4.16 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro : — et macro: - - -.

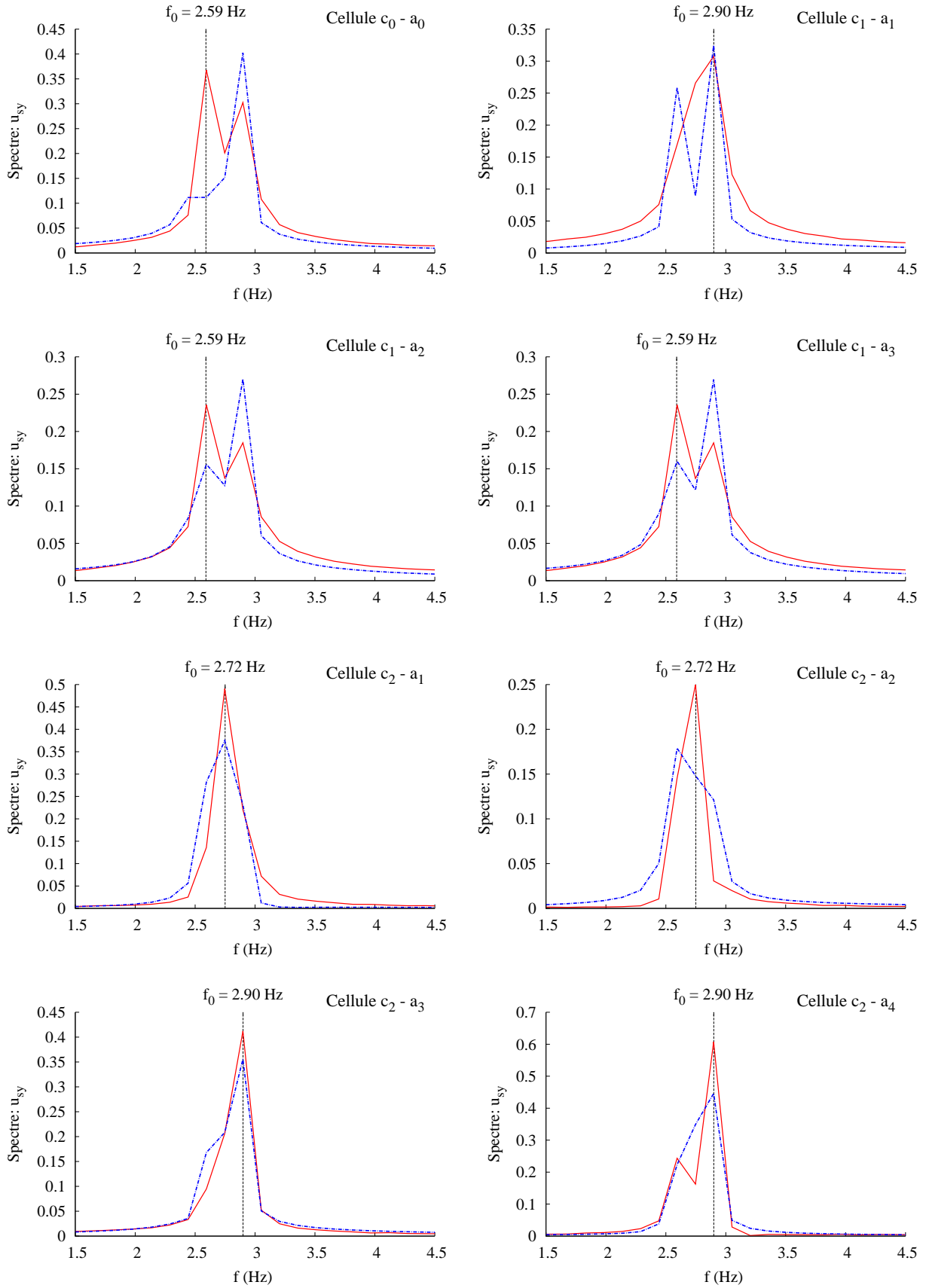


TABLE 4.17 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro : — et macro : - - -.

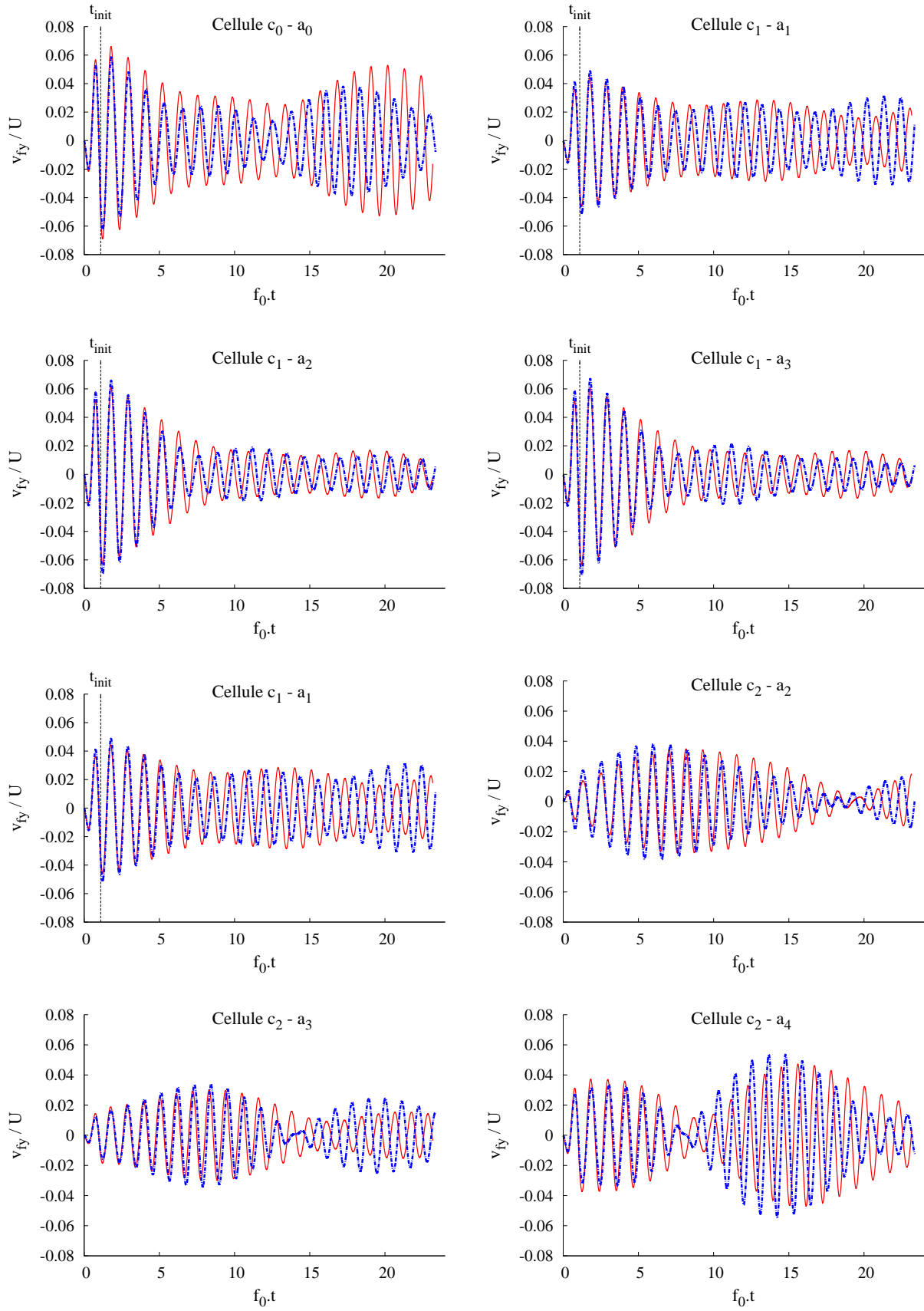


TABLE 4.18 – Comparaison entre les pressions moyennes cellulaires p issues des simulations aux échelles micro : — et macro: - - -.

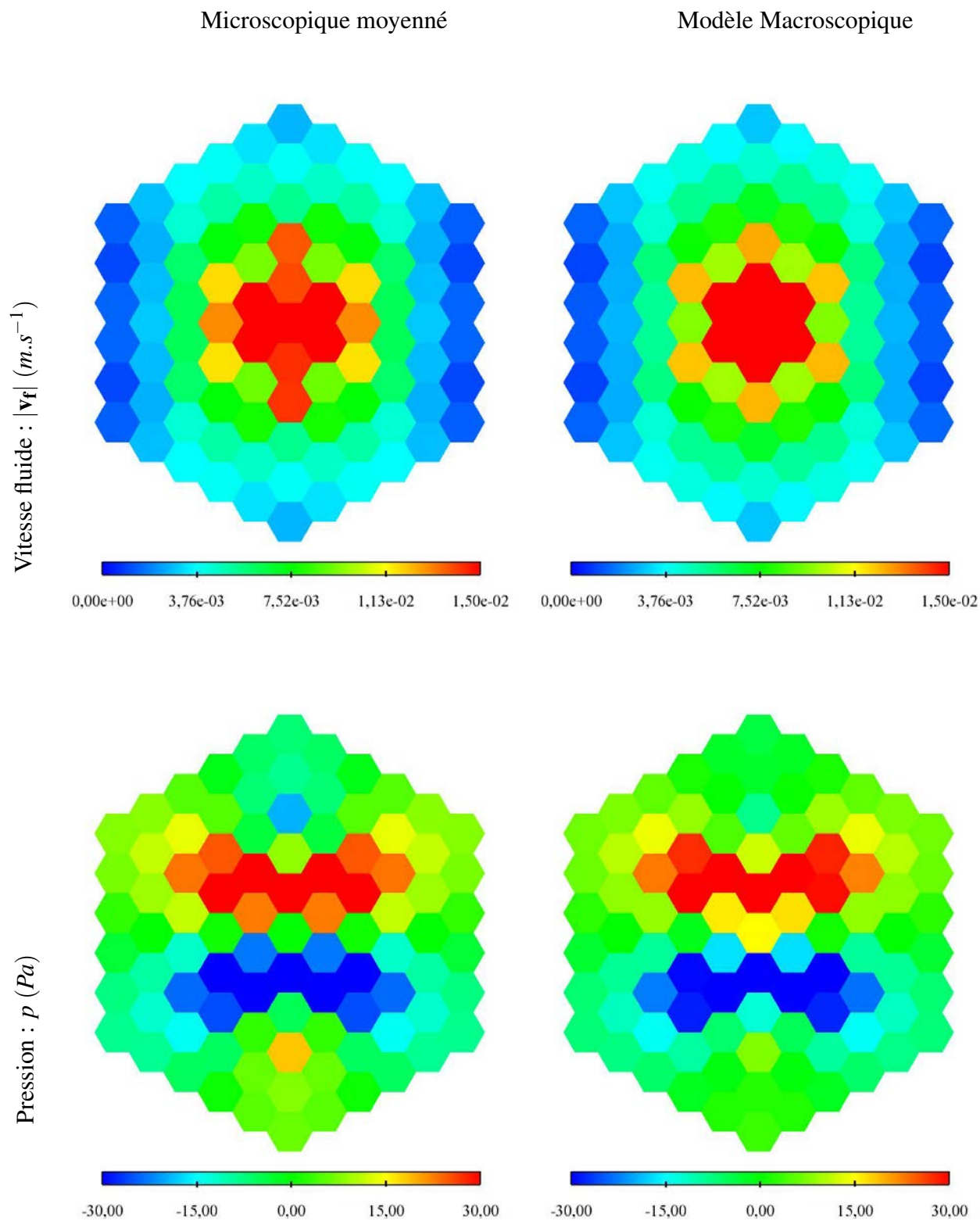


TABLE 4.19 – Comparaison entre les champs de vitesse et de pression instantanés de l'écoulement moyen obtenus par la simulation à l'échelle microscopique et le modèle macroscopique

4.3 Apports en termes de gain CPU

Faisceaux de cylindres

L'approche multi-échelle proposée est appliquée à la simulation des réponses vibratoires d'un faisceau de cylindres en mouvement suivant 1DDL, pour différentes configuration mécaniques:

1. L'écoulement est initialement au repos, soit $U_\infty = 0$.
2. L'écoulement est gouverné par un courant stationnaire vérifiant $Re = 100$ et $U_r = 0.91$.
3. La fréquence propre des structures du large faisceau est telle que $f_s = 4.0$ Hz au lieu de $f_s = 1.1$ Hz pour les autres cas.

CAPACITÉS PRÉDICTIVES Pour l'ensemble des configurations traitées, les résultats numériques du modèle macroscopique présentent un accord satisfaisant avec les données de référence⁴, traduisant ainsi une bonne robustesse de la méthode proposée. Cette concordance est valable aussi bien pour les déplacements des structures, que pour les champs hydrodynamiques cellulaires. La capacité du modèle macro à reproduire la variété des réponses vibratoires identifiées au sein du faisceau de référence tend à montrer la validité du calcul des charges fluides exercées sur chaque cylindre, obtenue conjointement par:

- une détermination des coefficients hydrodynamiques
- une résolution numérique des champs hydrodynamiques fluctuants en espace

Pour un système tubulaire donné, la valeur des coefficients mis en jeu dans l'expression de la force fluide est invariante d'une cellule de base à l'autre. C'est donc la contribution des champs hydrodynamiques, variant significativement d'un point à l'autre du domaine, qui est en cause dans la diversité des réponses obtenues parmi les structures mobiles.

COÛT NUMÉRIQUE La Table 4.20 compare le temps et les ressources nécessaires aux modèles micro et macro pour simuler numériquement 10 périodes d'oscillations. Pour les configurations traitées - laminares et 2D - une simulation macroscopique, conjointement avec celle nécessaire pour l'estimation des coefficients hydrodynamiques, représente un gain CPU de 61%. Dans la pratique, les jeux de coefficients pourraient être déterminés une seule fois pour l'ensemble des régimes de fonctionnement attendus. Si une estimation des coefficients n'est pas nécessaire, une simulation macroscopique représente alors un gain CPU de 95.1%.

Enfin, toutes les simulations microscopiques des faisceaux de grande taille sont réalisées sur un ordinateur équipé de processeurs *Intel Xeon X5670*, avec une fréquence de base de 2.93 GHz ; tandis que les simulations microscopiques sur DRR et macroscopiques sont réalisées sur un ordinateur équipé de processeurs *Intel Xeon E5620*, avec une fréquence de base de 2.40 GHz.

4. issues des simulations microscopiques

Faisceaux d'hexagones

L'approche multi-échelle est appliquée à la simulation des vibrations dans les faisceaux de structures hexagonales se déplaçant suivant *1 DDL*, et immergées dans un fluide initialement au repos. Les paramètres géométriques et mécaniques sont du même ordre de grandeur que ceux du réacteur *PHÉNIX*.

CAPACITÉS PRÉDICTIVES La simulation macroscopique des déplacements au cours du temps restitue les allures de battement que présentent les réponses issues du calcul microscopique de référence. Les divergences observées traduisent un écart entre les couples de fréquences microscopique et macroscopique: cet écart peut être quantifié sur des spectres plus riches, nécessitant des signaux temporels de plus grandes tailles.

À partir de fonctions analytiques, on peut se rendre compte du niveau de précision attendu par le modèle homogénéisé: la Figure 4.31 confronte 2 signaux de battements dont seule l'harmonique f_1 diffère, avec un écart relatif de 1.9%.

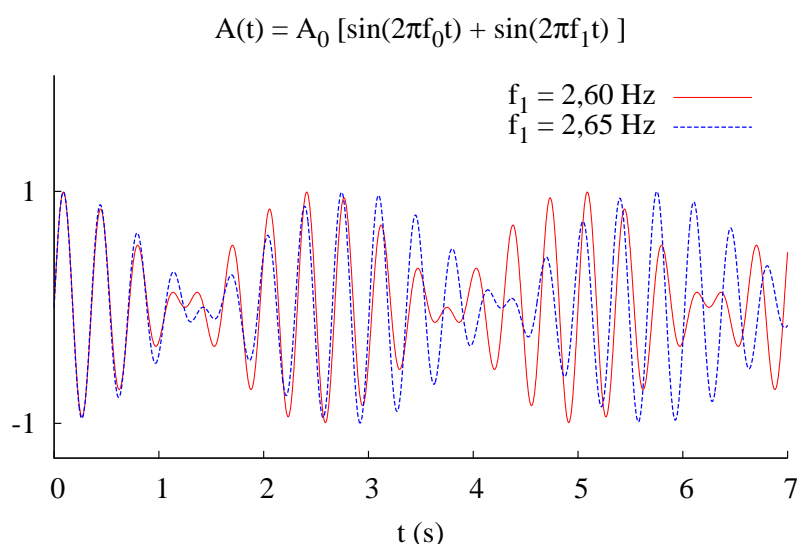


FIGURE 4.31 – *Fonctions de battement des harmoniques f_0 et f_1 , avec $f_0 = 3.0 \text{ Hz}$.*

Une perspective d'amélioration porte sur la formulation des charges hydrodynamiques: la prise en compte de termes quadratiques (non-linéaires) en vitesse fluide et/ou structure et leurs impacts sur la réponse modale du système est une première piste à étudier.

COÛT NUMÉRIQUE La Table 4.21 compare le temps et les ressources nécessaires aux modèles micro et macro pour simuler numériquement 10 périodes d'oscillations. Pour les configurations traitées - laminares et 2D - une simulation macroscopique, conjointement avec celle nécessaire pour l'estimation des coefficients hydrodynamiques, représente un gain *CPU* de 86.2%. Dans la pratique, les jeux de coefficients pourraient être déterminés une seule fois pour l'ensemble des régimes de fonctionnement attendus. Si une estimation des coefficients n'est pas nécessaire,

une simulation macroscopique représente alors un gain *CPU* de 99.9%.

Enfin, toutes les simulations microscopiques, faisceaux de grande taille et DRR, sont réalisées sur un ordinateur équipé de processeurs *Intel Xeon X5670*, avec une fréquence de base de 2.93 GHz ; tandis que les simulations macroscopiques sont réalisées sur un ordinateur équipé de processeurs *Intel Xeon E5620*, avec une fréquence de base de 2.40 GHz.

	Maillage	Processeurs	Temps Utilisateur	Temps CPU
MICROSCOPIQUE	658 464	120	11 h 08 min	55 jrs 16 h 0 min
FERMETURE	10 944	2	3 h 45 min	7 h 30 min
MACROSCOPIQUE	1 444	1	33 min	33 min

TABLE 4.20 – *Performances CPU pour faisceaux de tubes cylindriques: coûts pour simuler 10 périodes d’oscillations*

	Maillage	Processeurs	Temps Utilisateur	Temps CPU
MICROSCOPIQUE	2 721 600	504	10 jrs 0 h 45 min	~ 14 ans
FERMETURE	126 600	24	1 jr 7 h 28 min	31 jr 11 h 48 min
MACROSCOPIQUE	1 356	1	09 min	09 min

TABLE 4.21 – *Performances CPU pour faisceaux de tubes hexagonaux: coûts numériques pour simuler 10 périodes d’oscillations.*

Chapitre 5

VIBRATIONS À 2DDL ET AMORTIES AU COURS DU TEMPS

Sommaire

5.1	Faisceaux de tubes cylindriques	135
5.2	Faisceau de tubes hexagonaux	143

Le présent chapitre permet d'évaluer les capacités prédictives du modèle macroscopique proposé, pour des faisceaux de grande taille présentant des réponses vibratoires suivant **2 degrés de liberté (2 DDL)** par structure.

Les données de référence - ou éléments de validation - sont obtenues à partir de la simulation des écoulements microscopiques: les variables hydrodynamiques calculées à cette échelle sont ainsi moyennées dans chaque cellule de base du système tubulaire considéré afin de rendre leur niveau de description spatiale conforme à celle de la modélisation macroscopique.

Les écoulements inter-tubes sont limités ici au régime laminaire, de sorte que les simulations microscopiques sont réalisées au moyen d'une *résolution directe des équations de Navier-Stokes* en des temps de calcul raisonnables. Le déplacement des interfaces mobiles est calculé à partir de la méthode numérique *ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian)* implémentée dans *Code_Saturne* depuis 1999 (*cf.* Archambeau et Guimet [2]).

La dynamique des structures entre en interaction avec des **écoulements initialement au repos**. On met en évidence des réponses en déplacement diversifiées au sein de chaque système tubulaire, ainsi que des structures mises en mouvement par l'effet de l'écoulement interstitiel seul. Dans un premier temps, le modèle homogénéisé est évalué pour un faisceau de tubes cylindriques, et dans un second temps, pour un faisceau de tubes à section hexagonale.

5.1 Faisceaux de tubes cylindriques

Le faisceau de référence est soumis à une sollicitation extérieure provoquant un écartement des structures localisées au centre du domaine, en périphérie du tube central (10 x 10). Les paramètres mécaniques et géométriques sont identiques à ceux de du faisceau de référence introduit au *Chapitre 4* (Table 4.1). Chaque structure déplacée est entraînée dans des oscillations suivant 2DDL, amorties au cours du temps.

Diversité des réponses vibratoires microscopiques

La réponse vibratoire du faisceau de référence en interaction avec l'écoulement interstitiel et initialement au repos est simulée numériquement à l'échelle microscopique, soit pour $U_\infty = 0$. Au cours de l'intervalle de temps $[0; t_{init}]$, un signal de force harmonique est imposé à l'ensemble des cylindres voisins au tube central (10x10), de sorte qu'ils s'en écartent. L'écoulement engendré par les structures sollicitées entraîne en oscillations les autres structures libres.

L'évolution temporelle des amplitudes de déplacement, ainsi que leurs spectres, sont tracés suivant la direction (Ox) pour les cylindres (11 x 11), (11 x 10) et (8 x 9) à la Figure 5.1, et suivant la direction (Oy) pour les cylindres (11 x 11), (10 x 11) et (9 x 8) à la Figure 5.2. La similitude entre les déplacements suivant chacune de ces directions permet de rendre compte de la **symétrie du mouvement** des structures par rapport au centre du faisceau.

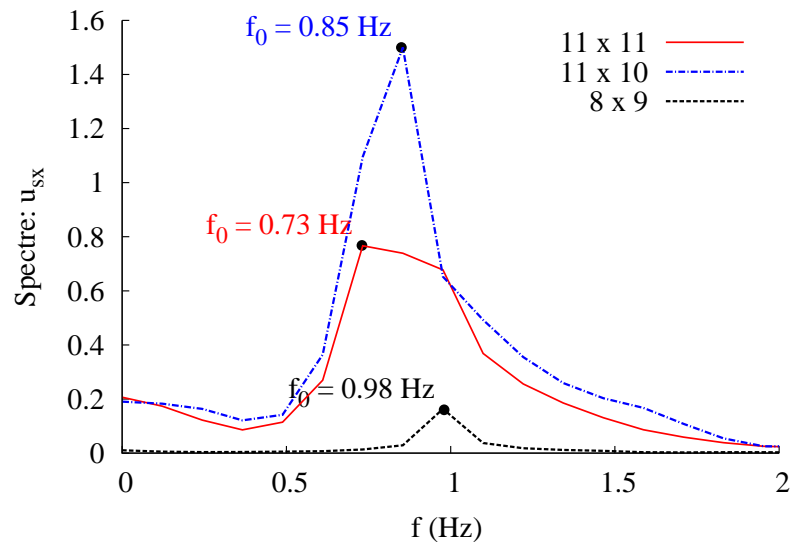
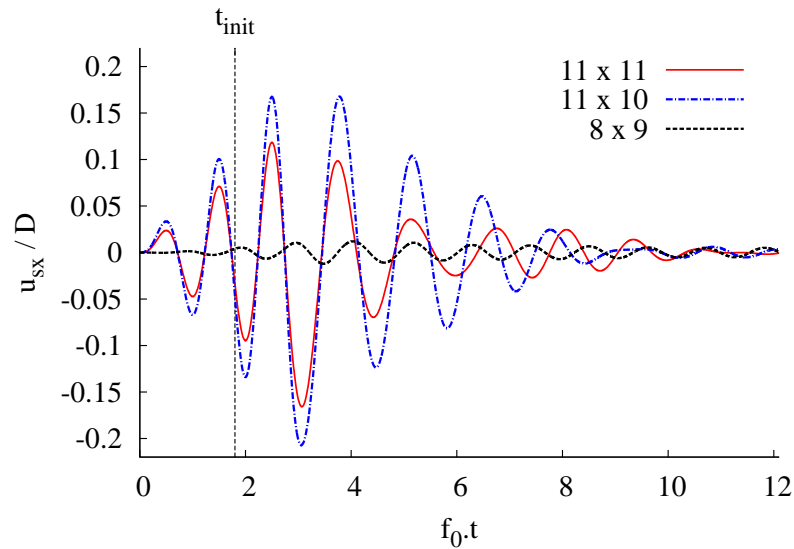


FIGURE 5.1 – Amplitudes de déplacement u_{sx} au cours du temps (haut) et son spectre (bas) issus de la simulation à l'échelle micro : on représente les réponses vibratoires respectives des cylindres (11 x 11), (11 x 10) et (8 x 9).

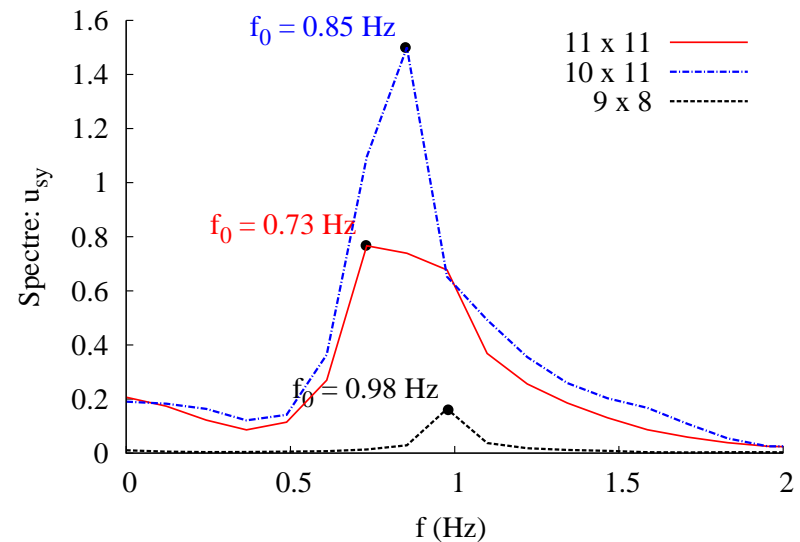
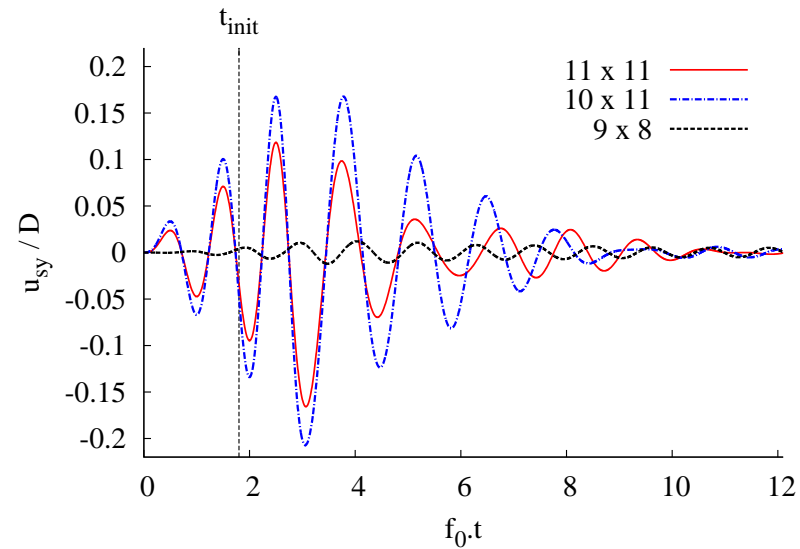


FIGURE 5.2 – Amplitudes de déplacement u_{sy} au cours du temps (haut) et son spectre (bas) issus de la simulation à l'échelle micro: on représente les réponses vibratoires respectives des cylindres (11 x 11), (10 x 11) et (9 x 8).

Estimation des coefficients hydrodynamiques

Le régime vibratoire du faisceau considéré ici est **amorti**. Dans ce cas, le DDR retenu est (de nouveau) constitué d'un cylindre fixe, et d'un autre mobile. L'étude des coefficients hydrodynamiques en régime amorti (voir *Chapitre 3*) repose sur un faisceau identique (en terme de paramètres mécaniques et géométriques) à celui du présent cas d'étude, à l'exception du nombre de degré de liberté par cylindre qui s'élève à 2 pour la présente configuration. Les coefficients hydrodynamiques obtenus pour 2 DDL sont reportés à la Table 5.1, et sont confrontés à ceux obtenus pour la configuration de référence à 1 DDL: l'écart entre les deux estimations est négligeable, ce qui confirme la dépendance du chargement hydrodynamique uniquement aux régimes d'écoulement et/ou vibratoire auquel est soumis les structure ; la direction des déplacement n'impactant pas la nature des forces mises en jeu.

	C_{MF}	C_{LF}	C_{MS}	C_{LS}	C_D
2 DDL	1.65	5.05	1.44	4.82	—
1 DDL	1.65	5.08	1.42	4.88	—

TABLE 5.1 – *Coefficients hydrodynamiques*

Comparaison micro-macro

Les amplitudes de déplacement sont tracées au cours du temps pour quelques cellules de base dans la Table 5.2 pour u_{sx} , et dans la Table 5.3 pour u_{sy} . Pour l'ensemble des cellules observées, les déplacements calculés au cours du temps par le modèle macroscopique sont en accord avec ceux obtenus par la simulation à l'échelle microscopique.

Les diagrammes des taux d'amortissement ξ_x et ξ_y sont représentés respectivement sur les Figures 5.3 et 5.4; ces derniers permettent d'évaluer plus en détail la capacité du modèle macroscopique à reproduire, suivant 2DDL, les réponses vibratoires individuelles de chaque structure. Ils montrent que le modèle macroscopique est sensible à la position des différentes structures au sein du faisceau, et signifie donc que la dépendance du chargement hydrodynamique sur une structure donnée à sa position au sein du faisceau est bien restituée. De même que sur les résultats microscopiques, on observe que le taux d'amortissement issu du calcul macroscopique est moins important pour les structures en oscillations libres.

Pour les taux d'amortissement, les écarts les plus importants entre les simulations microscopique et macroscopique est observé pour le cylindre (8 x 8) et s'élève à 39.0 % pour ξ_x , et s'élève à 87.0 % pour ξ_y .

La capacité du modèle macroscopique à prédire les réponses vibratoires propre à chaque cylindre du large faisceau reste satisfaisante pour cette configuration 2DDL. Cela se justifie, d'une part, par une estimation adéquate des coefficients hydrodynamiques issue des solutions

microscopiques sur domaine réduite (*Chapitre 3*) ; et d'autre part, par le calcul satisfaisant des composantes V_{fx} et V_{fy} du champ de vitesse fluide mises en jeu dans l'estimation de la force pariétale exercée sur chaque structure mobile. Les Tables 5.4 et 5.5 présentent l'évolution temporelle des intensités de la vitesse fluide moyenne V_{fx} et V_{fy} au sein des mêmes cellules de base pour lesquelles les amplitudes déplacements ont été décrites (Tables 5.2 et 5.3). Les résultats du modèle macro sont de qualité satisfaisante en terme de vitesse fluide, traduisant ainsi la robustesse de l'approche multi-échelle en configuration 2DDL.

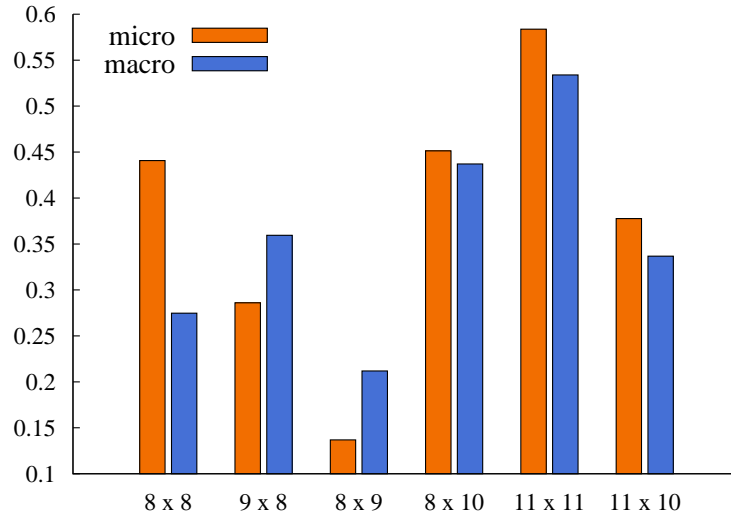


FIGURE 5.3 – Taux d'amortissement ξ_x suivant la position d'un cylindre mobile : comparaison entre les résultats des simulations à l'échelle microscopique et macroscopique.

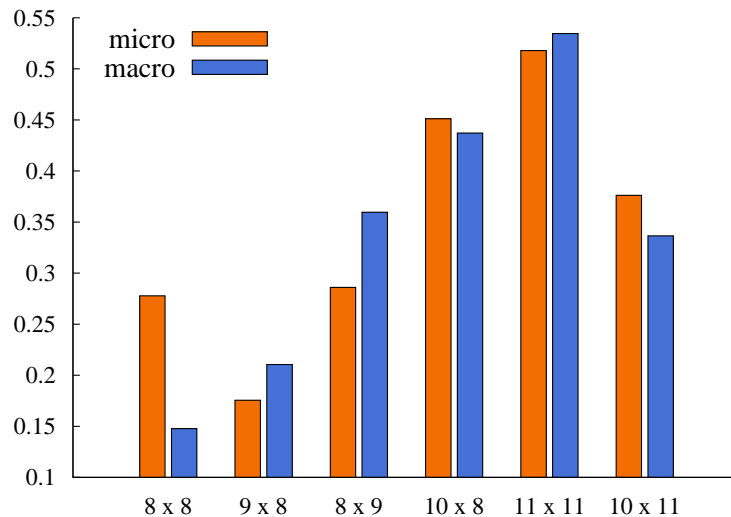


FIGURE 5.4 – Taux d'amortissement ξ_y suivant la position d'un cylindre mobile : comparaison entre les résultats des simulations à l'échelle microscopique et macroscopique.

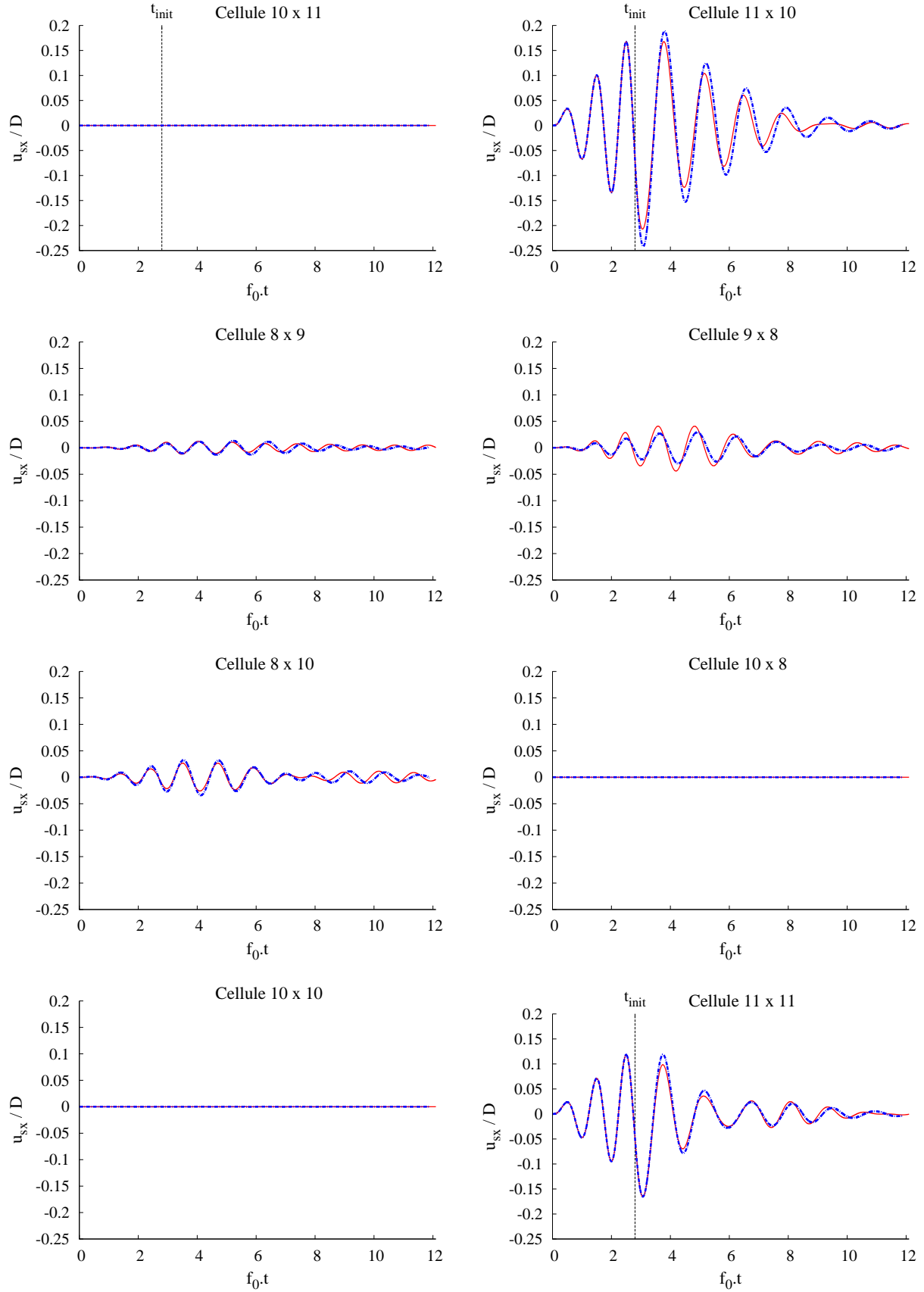


TABLE 5.2 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sx} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_x)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (10 x 11), (11 x 10) et (11 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des autres cellules sont en déplacements libres.

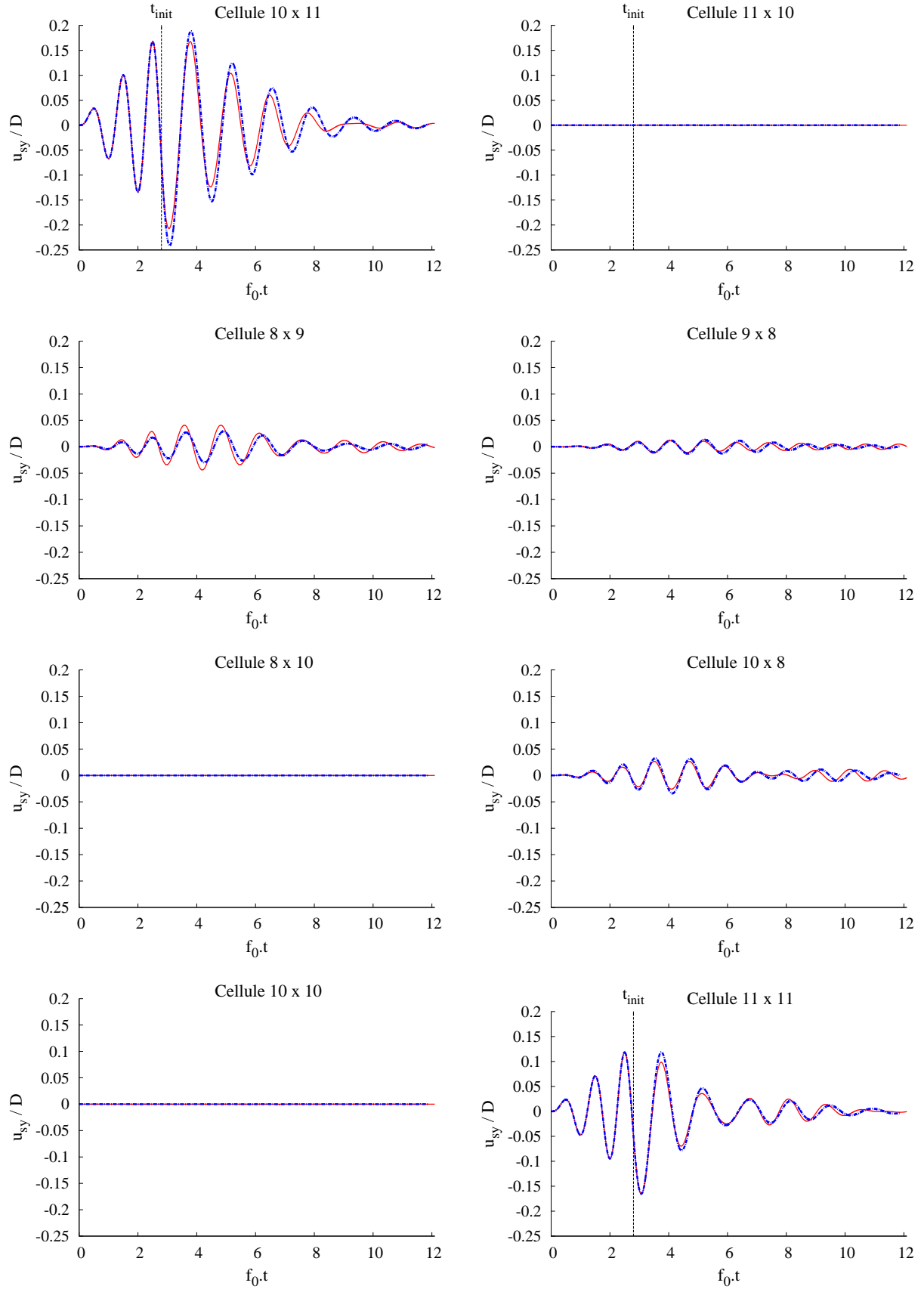


TABLE 5.3 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (10 x 11), (11 x 10) et (11 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des autres cellules sont en déplacements libres.

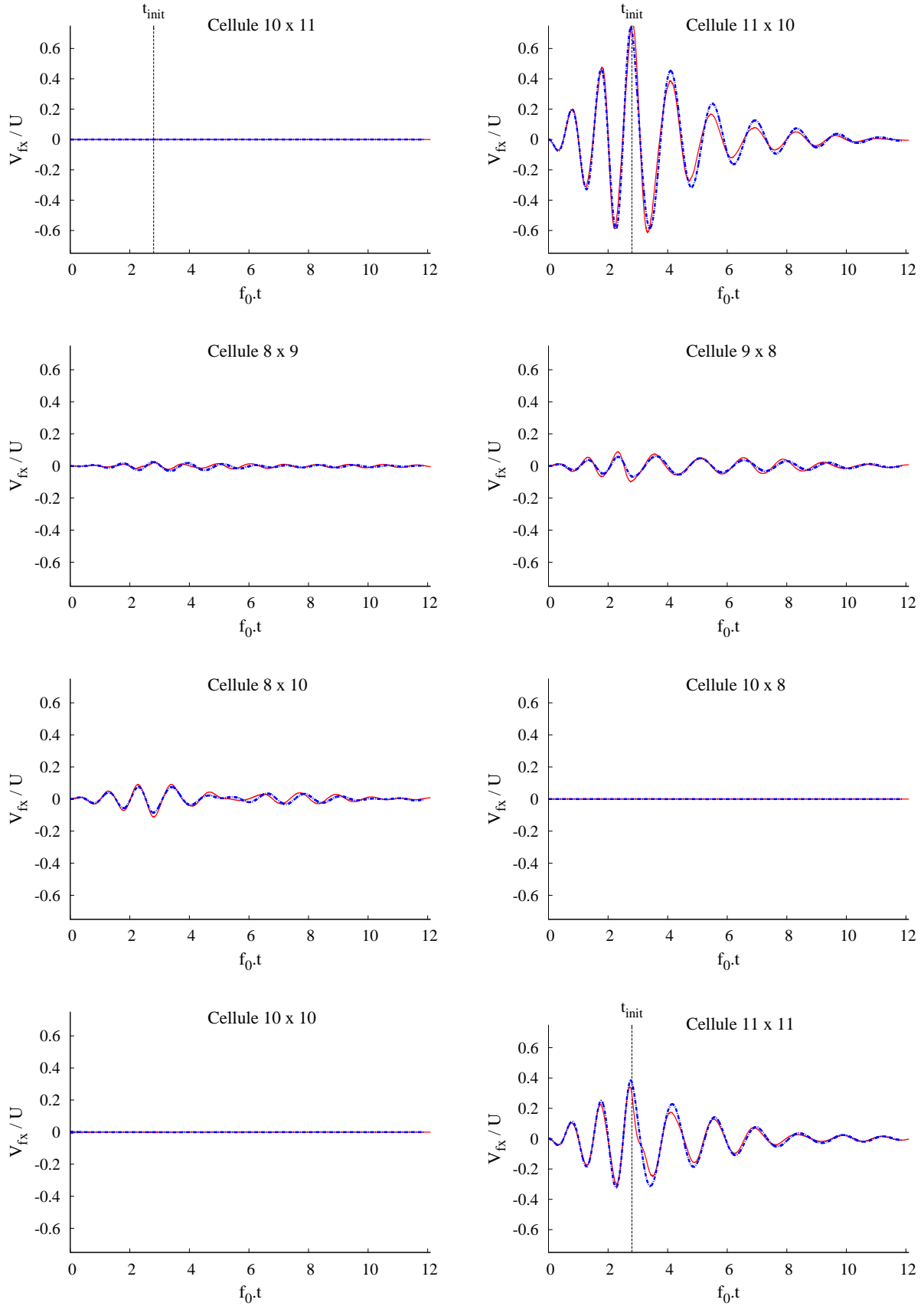


TABLE 5.4 – Comparaison entre les intensités de vitesse fluide $V_{fx} = (\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{e}_x)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (10 x 11), (11 x 10) et (11 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des autres cellules sont en déplacements libres.

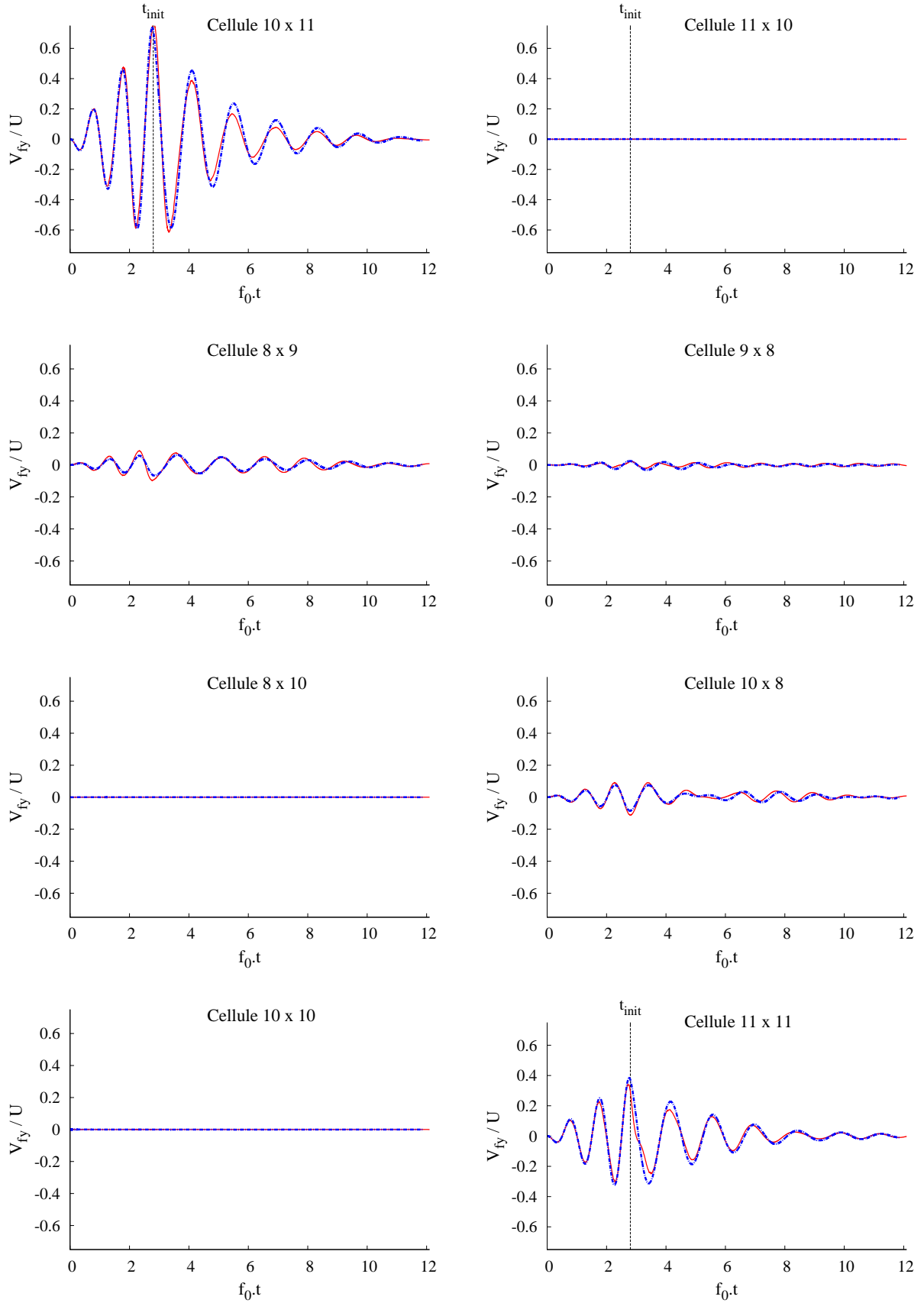


TABLE 5.5 – Comparaison entre les intensités de vitesse fluide $V_{fy} = (\mathbf{V}_f \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations aux échelles micro: — et macro: - - -. Les cylindres associés aux cellules (10 x 11), (11 x 10) et (11 x 11) sont sollicités par un signal de force initial jusqu'à l'instant t_{init} , tandis que les structures des autres cellules sont en déplacements libres.

5.2 Faisceau de tubes hexagonaux

Le cas test traité ici représente une approche simplifiée du phénomène de gerbage rencontré dans les cœurs de RNR-Na. Ce phénomène se caractérise par un écartement des assemblages combustibles dont l'origine proviendrait d'une sur-pression du fluide interstitiel, localisée dans une zone très réduite du cœur. Les structures au voisinage de cette sur-pression sont entraînées dans des vibrations rapides et de grandes amplitudes.

Diversité des réponses vibratoires microscopiques

La réponse vibratoire du faisceau de référence en interaction avec l'écoulement interstitiel et initialement au repos est simulé numériquement à l'échelle microscopique. Chaque structure appartenant aux couronnes c_0 , c_1 et c_2 se déplace suivant 2DDL.

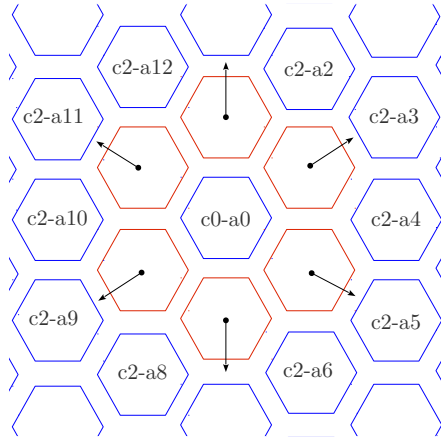


FIGURE 5.5

A l'instant initial ($t = 0$), le système est à l'équilibre : toutes les structures sont fixes et le fluide au repos. Au cours de l'intervalle de temps $[0; t_{init}]$, un signal de force harmonique de même intensité est imposé à l'ensemble des structures appartenant à la couronne c_1 , celles de la couronne c_2 étant en déplacements libres. (Figure 5.5). Cette force entraîne les structures sollicitées dans mouvements d'oscillations, amorties au cours du temps par la présence du fluide interstitiel. Les réponses vibratoires sont décrites pour différentes structures des couronnes mobiles c_1 et c_2 : suivant leur position dans le domaine, on peut alors identifier différentes réponses vibratoires.

Comparaison micro-macro

Les amplitudes de déplacements suivant \mathbf{e}_y sont tracées au cours du temps pour quelques cellules de base et représentées dans la Table 5.7. Pour l'ensemble des cellules observées, les amplitudes de déplacement calculées au cours du temps par le modèle macroscopique présentent un accord satisfaisant avec celles issues de la simulation microscopique.

Cet accord se justifie, par un calcul correct des champs moyens de vitesse fluide mis en jeu dans l'estimation des forces hydrodynamiques exercées sur chaque structure mobile, et par l'estimation adéquate des coefficients hydrodynamiques: ces derniers sont identiques à ceux déterminés pour la configuration hexagonale du *Chapitre 04* (Table 4.15). La Table 5.6 représente une distribution spatiale instantanée de la norme de la vitesse fluide, ainsi que celle de la pression de l'écoulement moyen sur l'ensemble du faisceau. la discordance observée entre les dis-

tributions à cet instant donné s'explique par un écart entre les modes de vibrations solutions microscopique et macroscopiques: les Tables 5.7 et 5.8 permettent d'observer cet écart fréquentiel sur les réponses temporelles de u_{sy} et V_{fy} .

La capacité du modèle macro à prédire les vibrations individuelles au sein d'un large faisceau reste néanmoins encourageante pour des structures hexagonales en mouvement suivant 2DDL.

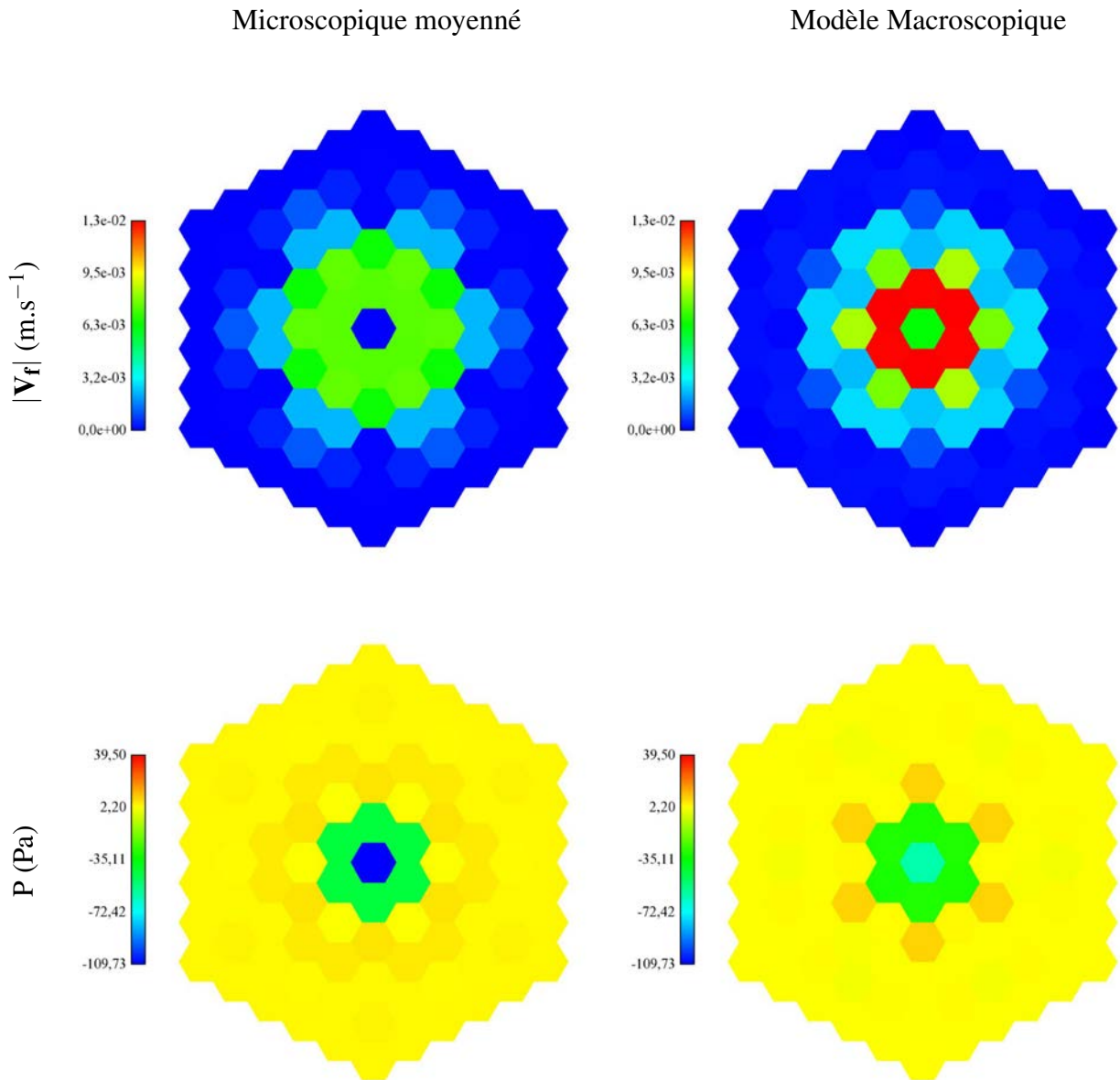


TABLE 5.6 – Comparaison entre les champs de vitesse et de pression instantanés de l'écoulement moyen obtenus par la simulation à l'échelle microscopique et le modèle macroscopique

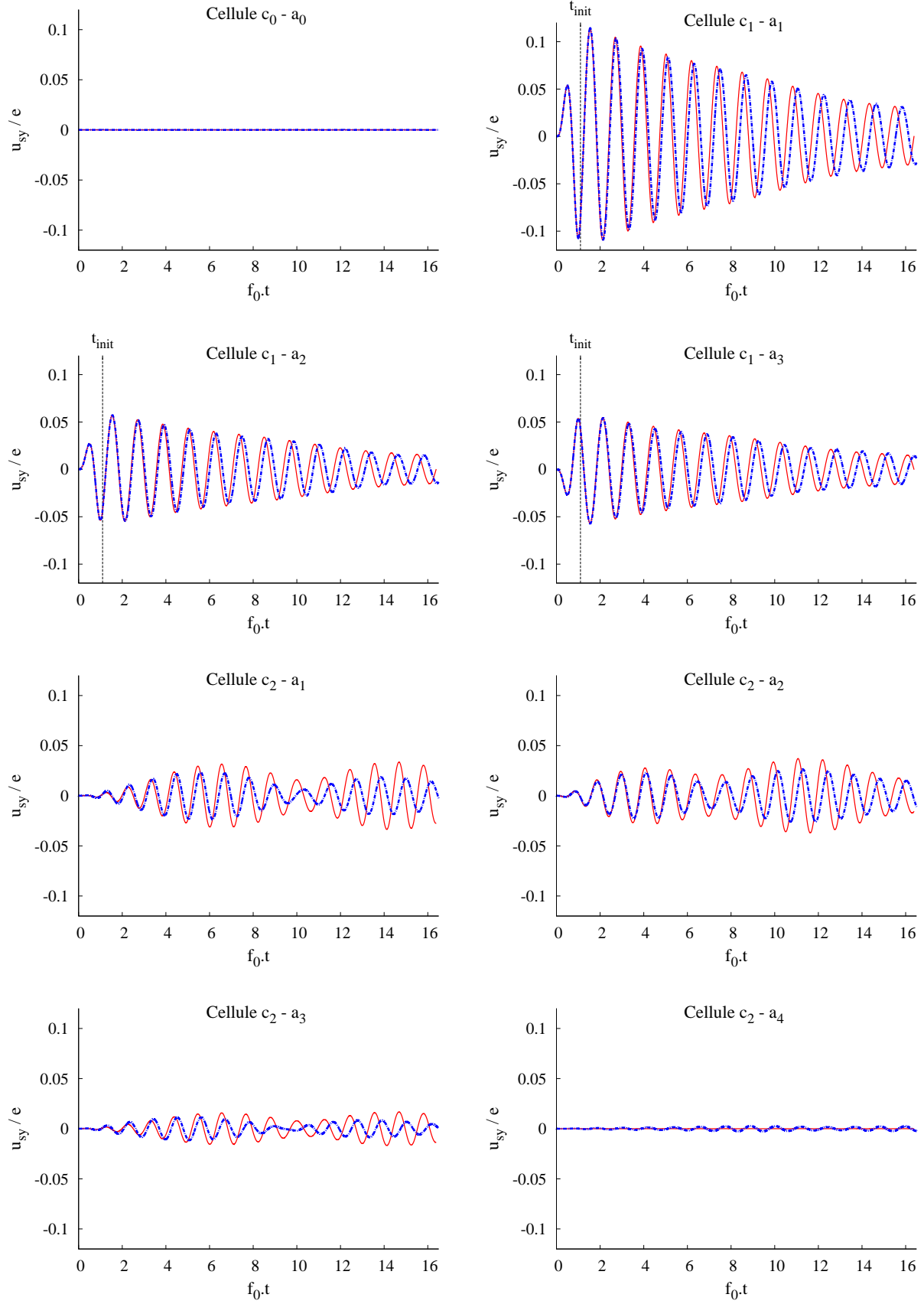


TABLE 5.7 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations à l'échelle microscopique : — et macroscopique : - - -.

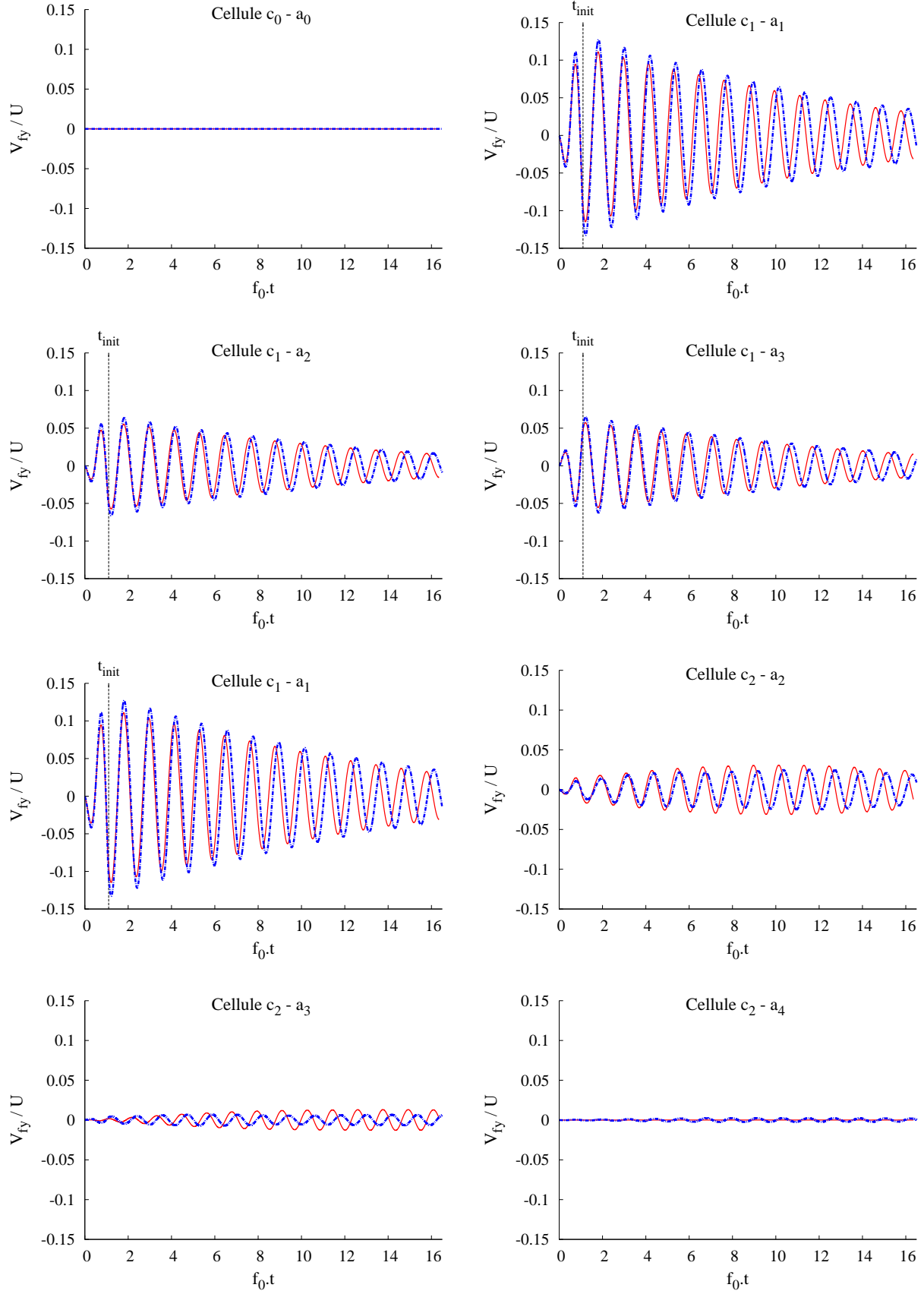


TABLE 5.8 — Comparaison entre le composantes V_{fy} du champ de vitesse fluide issues des simulations à l'échelle microscopique : — et macroscopique : - - -.

Conclusion partielle

Pour des vibrations suivant 2DDL, les résultats numériques du modèle macroscopique présentent un accord qui reste satisfaisant avec les données de référence, traduisant ainsi une bonne robustesse de la méthode proposée. Les apports en termes gain CPU restent du même ordre que ceux déterminés au *Chapitre 4*, section 4.3 (voir Tables 4.20 et 4.21).

Chapitre 6

VIBRATIONS À 1DDL ET AUTO-ENTRETENUES AU COURS DU TEMPS

Sommaire

6.1	Configuration du système de référence	149
6.2	Fermeture des forces hydrodynamiques	150
6.3	Application au problème homogénéisé	153

Ce chapitre met en évidence des questions ouvertes sur l'adéquation, l'amélioration et l'extension de la solution proposée vers des applications plus complexes, nécessitant d'approfondir les travaux.

La méthode de fermeture proposée nécessite de définir un *DRR*, dont le régime dynamique est similaire à celui du système tubulaire de référence. Néanmoins, le nombre de structures mobiles est un facteur conditionnant la stabilité vibratoire des faisceaux de grandes tailles (*Chapitre 2*, section 2.1), impactant ainsi la représentativité d'un domaine réduit vis-à-vis d'un système donné. Pour des vibrations amorties au cours du temps (ou inconditionnellement stables), un *DRR* constitué de 2 structures - l'une fixe et l'autre mobile - est suffisant pour restituer les charges hydrodynamiques en jeu dans les faisceaux de grandes tailles (*Chapitre 2*, section 2.5), attribuant ainsi des capacités prédictives intéressantes au modèle homogénéisé (*Chapitre 4* et *Chapitre 5*).

On se propose alors de déterminer si la méthode proposée pour résoudre et/ou fermer le problème macroscopique est adaptée aux systèmes tubulaires présentant un *couplage fluide-élastique* non-négligeable. De même que pour des oscillations amorties au cours du temps, la représentativité des coefficients hydrodynamiques est analysée quantitativement en *régime vibratoire auto-entretenues*, et les réponses vibratoires issues de la résolution du problème homogénéisé correspondant sont discutées.

6.1 Configuration du système de référence

DYNAMIQUE DE RÉFÉRENCE A l'instant initial ($t = 0$), le système est à l'équilibre : tous les cylindres du faisceau sont fixes et le fluide est gouverné par un écoulement stationnaire de vitesse inter-tube U_∞ . Au cours de l'intervalle de temps $[0; t_{init}]$, un même signal de force harmonique est imposé à l'ensemble des cylindres désignés comme *Impulsés* (voir Figure 2.10). Chaque structure mobile du système est gouvernée par une loi d'oscillateur harmonique, en déplacement suivant 1DDL.

Le régime de l'écoulement est suffisamment important pour impacter la dynamique des cylindres et donner lieu à un *couplage fluide-élastique*. Les structures déplacées de leurs positions d'équilibre présentent des amplitudes de déplacement bornées au cours du temps, soit *auto-entretenues*: ce comportement représente un état de stabilité conditionnelle, et se caractérise par le jeu de paramètres adimensionnels m^* , P^* , Re et U_r , regroupés dans la Table 6.2.

La littérature propose des diagrammes de stabilité fluide-élastique en faisceaux, mais dont les critères sont valables pour des *petits* groupes de cylindres, constitués au plus de 9 structures, et soumis à des écoulements turbulents tels que $Re > 10^4$ (Païdoussis et al. [47], Price [50, 52], Tanaka et al. [69, 70]). De ce fait, l'ensemble des paramètres qui caractérise la présente configuration (Table 6.2) ne se base pas sur les diagrammes existants, mais se déduit de plusieurs *expérimentations numériques*.

PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES On simule numériquement les réponses hydrodynamiques et vibratoires de faisceaux constitués de 361 cylindres disposés suivant un pas carré. Ce système présente deux zones distinctes (Figure 2.10) :

- une **zone mobile** localisée au centre du faisceau et constituée de 81 cylindres mobiles. L'action d'un bref signal de force met en mouvement chacune de ces structures initialement à l'équilibre (ou au repos). Suite à cette sollicitation initiale, chaque cylindre est libre de se déplacer individuellement.
- une **zone fixe** en périphérie de la zone mobile est constituée des 280 autres cylindres du faisceau, tous maintenus fixes. Dans cette zone, seuls les champs hydrodynamiques moyens sont observés.

La Figure 2.10 présente le système de numérotation retenu pour l'identification des différentes cellules de base et/ou structures du large faisceau, et la Table 6.1 en regroupe les propriétés géométriques et mécaniques .

D	f_s	v	ρ_f	U	U_∞
10,0 mm	1,1 Hz	$1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$0,011 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$0,027 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

TABLE 6.1 – *Données géométriques et mécaniques du domaine matériel*

m^*	P^*	Re	U_r
3,0	1,4	270	2,45

TABLE 6.2 – *Paramètres adimensionnels*

CONFIGURATIONS NUMÉRIQUES Un aperçu du maillage du domaine fluide est présenté en Figure 4.2 : les critères de raffinement sont les mêmes que ceux introduits au *Chapitre 4*, paragraphe 4.1.1. Le pas de temps retenu vérifie $\Delta t = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Les frontières extérieures du domaine (*haute, basse, gauche et droite*) sont assignées de conditions numériques *périodiques*. Les bords circulaires représentant les interfaces fluide-cylindres sont définis numériquement comme des parois rigides, vérifiant la condition d'adhérence pour le fluide (Figure 2.10).

6.2 Fermeture des forces hydrodynamiques

Choix du domaine réduit représentatif

Une méthode numérique est proposée pour l'estimation des coefficients mis en jeu dans le modèle de force retenu pour la fermeture du problème macroscopique. Cette méthode nécessite de

définir un domaine réduit représentatif de réponse mécanique similaire à celle du large système de référence. On se propose de déterminer le DRR adapté au large faisceau de référence en régime vibratoire auto-entretenu:

- **DRR I** est constitué de **2 cylindres entiers**, l'un fixe et l'autre mobile. Les oscillations de la structure mobile de ce domaine sont amorties au cours du temps, traduisant un régime vibratoire inconditionnellement stable ; tandis que celles des structures mobiles du faisceau de référence sont auto-entretenues, traduisant un régime vibratoire conditionnellement stable. Les réponse de *DRR I* ne sont pas représentatives de la dynamique du large faisceau de référence, et ce domaine ne peut être retenu pour fermer le problème.
- **DRR II** est constitué de **4 cylindres entiers**, 2 fixes et 2 autres mobiles. Les oscillations des structures mobiles de ce domaine sont amorties au cours du temps. De même que pour le DRR I, ce type de domaine réduit n'est donc pas représentatif de la dynamique du large faisceau de référence.
- **DRR III** est constitué de **8 cylindres entiers**, 4 fixes et 4 autres mobiles, tel que l'illustre la Figure 6.1. La Figure 6.2 donne un aperçu des solutions temporelles obtenues, montrant des régimes vibratoires similaires, soit auto-entretenus, entre faisceau de référence et *DRR III*. On note cependant un écart d'environ 30% entre les amplitudes de déplacement des deux domaines. On opte donc pour *DRR III* pour procéder à la fermeture des charges fluides du problème homogénéisé.

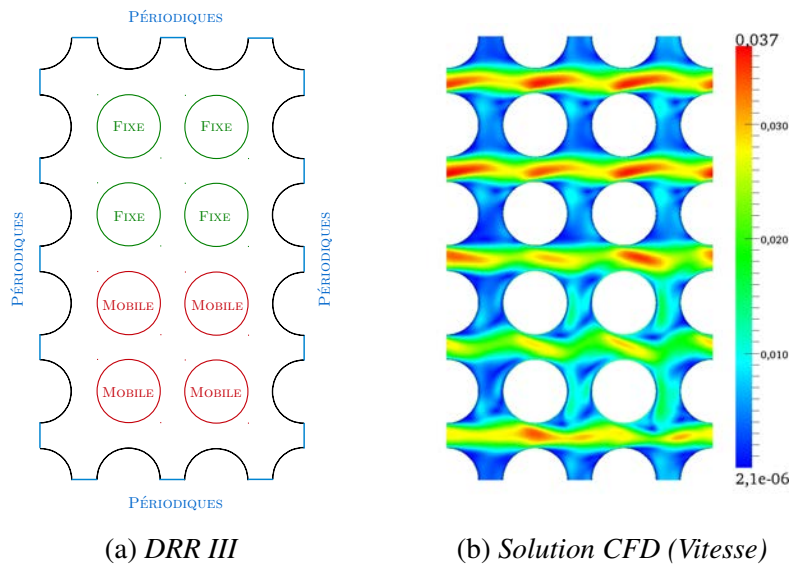


FIGURE 6.1 – *Domaine réduit représentatif DRR III (a) et de la solution de l'écoulement à l'échelle microscopique à partir d'une simulation numérique CFD (b)*

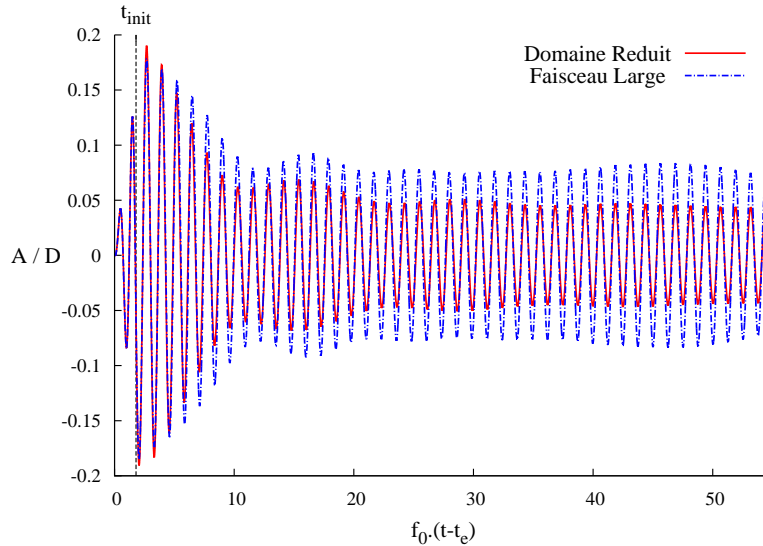


FIGURE 6.2 – Solutions en amplitude de déplacement d’une structure du domaine réduit représentatif *DRR III* confrontée à celle du cylindre central (10 x 10) du large faisceau de référence

Estimation des coefficients

La solution microscopique de l’écoulement du domaine réduit retenu permet de calculer avec précision les efforts hydrodynamiques exercés sur chacun des 8 cylindres représentatifs. Les coefficients mis en jeu dans le modèle de force $\tilde{\mathbf{F}}$ (eq. 2.15) sont estimés à partir de la procédure définie au *Chapitre 2*, section 2.3.2.

Le comportement dynamique des structures mobiles présentent une phase d’amortissement transitoire, succédant immédiatement le signal de force imposé, avant d’adopter un régime auto-entretenu. De ce fait, les contributions de différentes natures mises en jeu dans la caractérisation du chargement hydrodynamique sont supposées varier significativement au cours du temps. Les coefficients sont estimés au cours du temps à partir de RLM réalisées sur différents échantillons temporels. Chaque échantillon compte l’équivalent de cinq périodes d’oscillations propres. Le nombre d’oscillations simuler pour cette configuration permet de distinguer 9 échantillons temporels, soit 9 jeux de coefficients estimés au cours du temps.

Représentativité des coefficients

Les coefficients estimés à partir du domaine réduit représentatif *DRR III* sont confrontés à ceux issus de la solution microscopique de l’écoulement au sein du large faisceau de référence. Les coefficients du faisceau de référence sont estimés pour chaque cellule de base de la manière suivante: 1- Les coefficients \mathbf{C}_{MF} , \mathbf{C}_{LF} et \mathbf{C}_D sont déterminés par RLM de la force hydrodynamique calculée sur chaque **cylindre fixe**. 2 - À partir des coefficients \mathbf{C}_{MF} , \mathbf{C}_{LF} et \mathbf{C}_D moyennés sur l’ensemble des tubes fixes, on détermine \mathbf{C}_{MS} et \mathbf{C}_{LS} par RLM des efforts calculés sur chaque **cylindre mobile**.

Les champs scalaires des coefficients C_{MF} , C_{LF} , C_{MS} et C_{LS} , pour un échantillon temporel donné (e_5), sont représentés à la Figure 6.3. Le coefficient C_D relie linéairement la composante stationnaire de la force de traînée à celle de la vitesse incidente U_∞ , et sont toutes deux définies de façon homogène dans le domaine. La valeur estimée de C_D est donc invariable au cours du temps et d'une cellule à l'autre du faisceau de référence (il n'est donc pas utile d'en faire une représentation par champ scalaire).

Les distributions spatiales des coefficients C_{MF} , C_{LF} , C_{MS} et C_{LS} sont très hétérogènes sur l'ensemble des cellules de base du faisceau, et présentent des singularités particulièrement fortes à l'interface fixe-mobile avale de la zone mobile. Prendre une valeur moyenne des coefficients sur l'ensemble des cellules de base ne permet pas de caractériser le chargement hydrodynamique exercé sur un cylindre quelconque du large faisceau.

Dans la Table 6.3, on évalue tout de même les écarts entre coefficients moyennés sur l'ensemble du faisceau de référence, et ceux issus de la solution sur *DDR III*. Aussi, leurs évolutions au cours du temps sont tracées à la Figure 6.4. Il apparaît que *DDR III* n'est pas un domaine réduit pertinent en raison des écarts importants observés sur l'estimation des coefficients, s'élevant notamment jusqu'à 200% pour C_{LF} .

	C_{MF}	C_{LF}	C_{MS}	C_{LS}	C_D
Référence	1.52	-2.73	1.75	0.15	0.38
DDR III	1.20	3.05	1.55	0.30	0.38
écart (%)	21.0	211.7	11.4	100.0	0.0

TABLE 6.3 – Comparaison entre les coefficients estimés à partir du faisceau de référence et du domaine réduit représentatif (*DDR III*), pour l'échantillon temporel e_5

6.3 Application au problème homogénéisé

Le problème homogénéisé est résolu à partir des coefficients hydrodynamiques obtenus à partir du domaine réduit *DDR III*, reportés à la table 6.3. En dépit d'une représentativité des coefficients hydrodynamiques peu pertinente pour *DDR III*, nous évaluons la capacité du modèle macroscopique à reproduire un régime de même nature. Les réponses vibratoires sont décrites pour différentes structures de la zone mobile du faisceau.

La Table 6.4 montre que les déplacements simulés par le modèle macro ne concordent pas avec celles ceux simulés micro: cela était attendu compte tenu de l'erreur pré-existante sur les oscillations de *DDR III* vis-à-vis du large faisceau (Figure 6.2). Le spectre de ces réponses en déplacement est tracé à la Table 6.5 ; il permet d'observer un accord satisfaisant entre les fréquences fondamentales issues des simulations macro et micro.

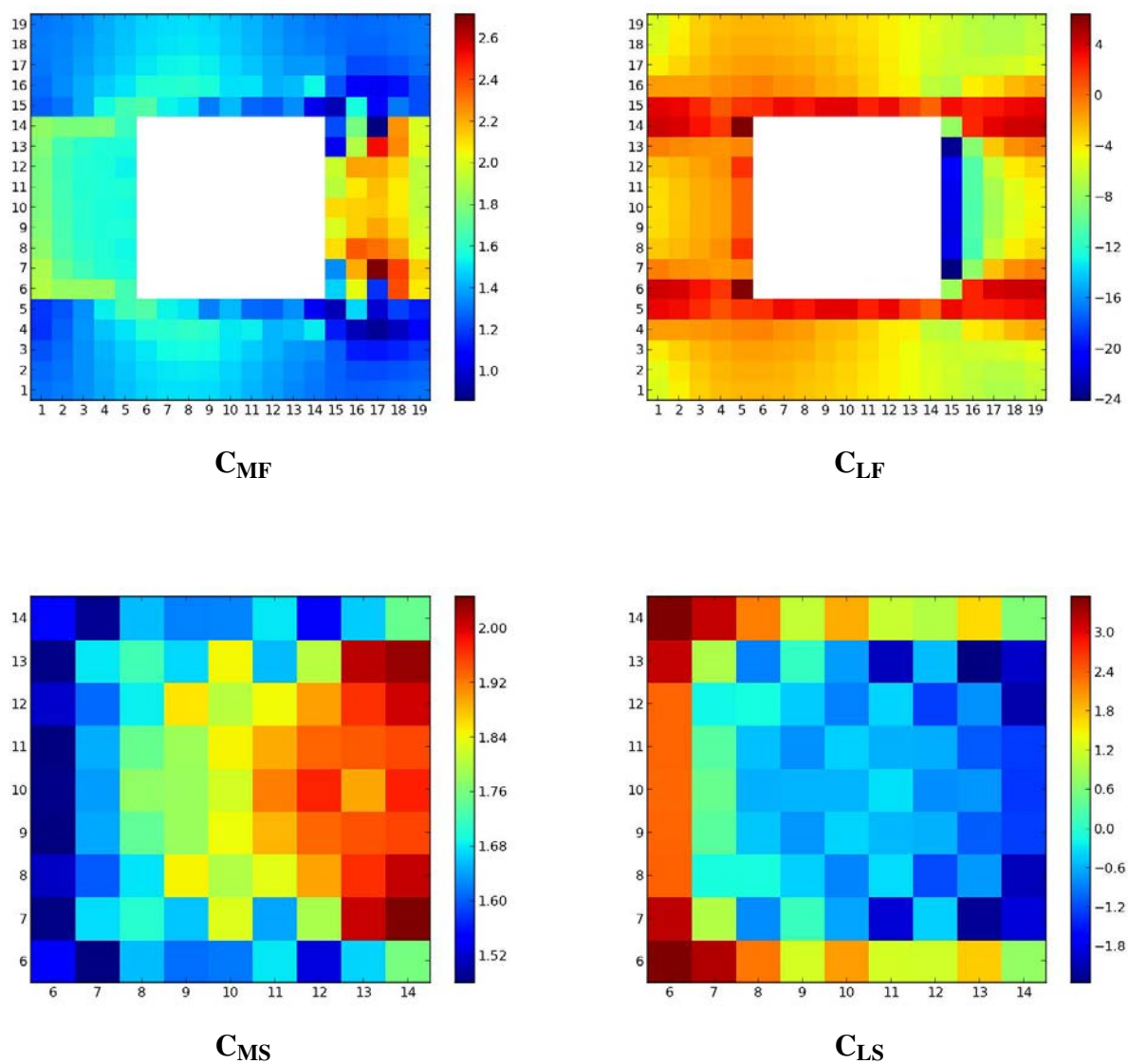


FIGURE 6.3 – Distribution spatiale et instantanée des coefficients C_{MF} , C_{LF} , C_{MS} et C_{LS} sur l'ensemble des cellules de base du faisceau de référence, pour l'échantillon temporel $e5$

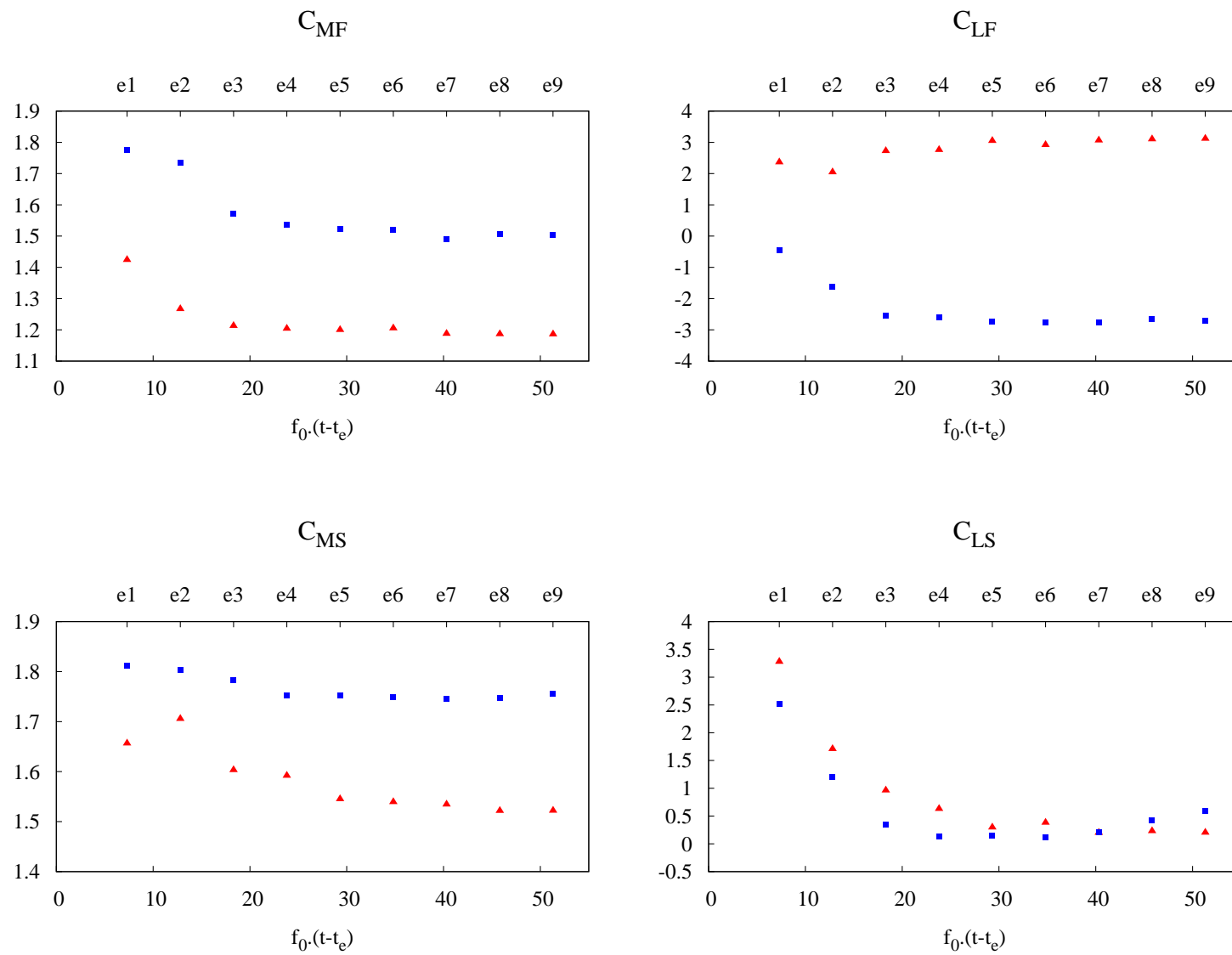


FIGURE 6.4 – Évolution temporelle des coefficients moyens estimés à partir du \blacktriangle : faisceau de référence et du \blacksquare : domaine réduit représentatif III, pour neuf échantillons temporels distincts.

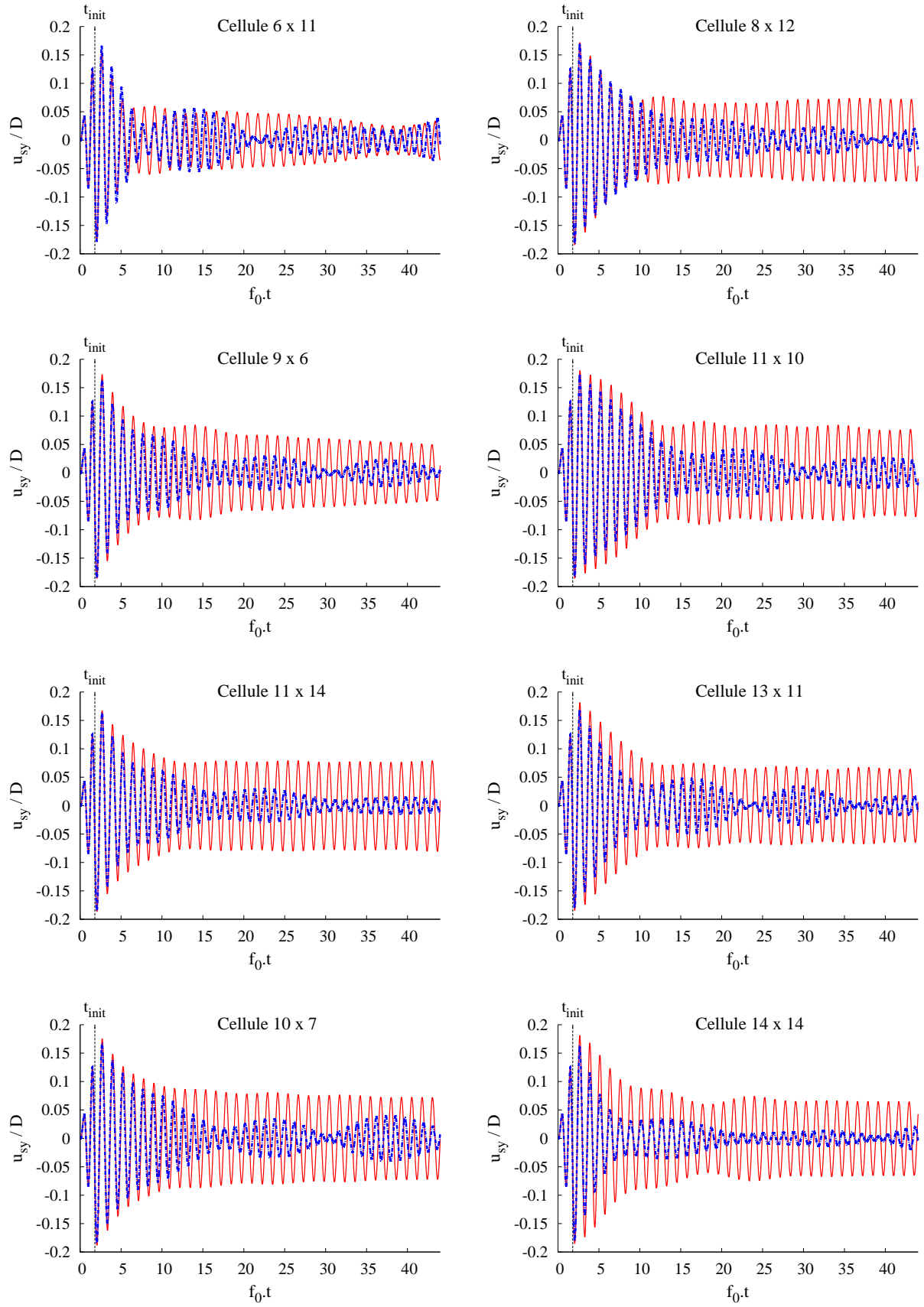


TABLE 6.4 – Comparaison entre les amplitudes de déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issues des simulations à l'échelle microscopique : — et macroscopique : - - -.

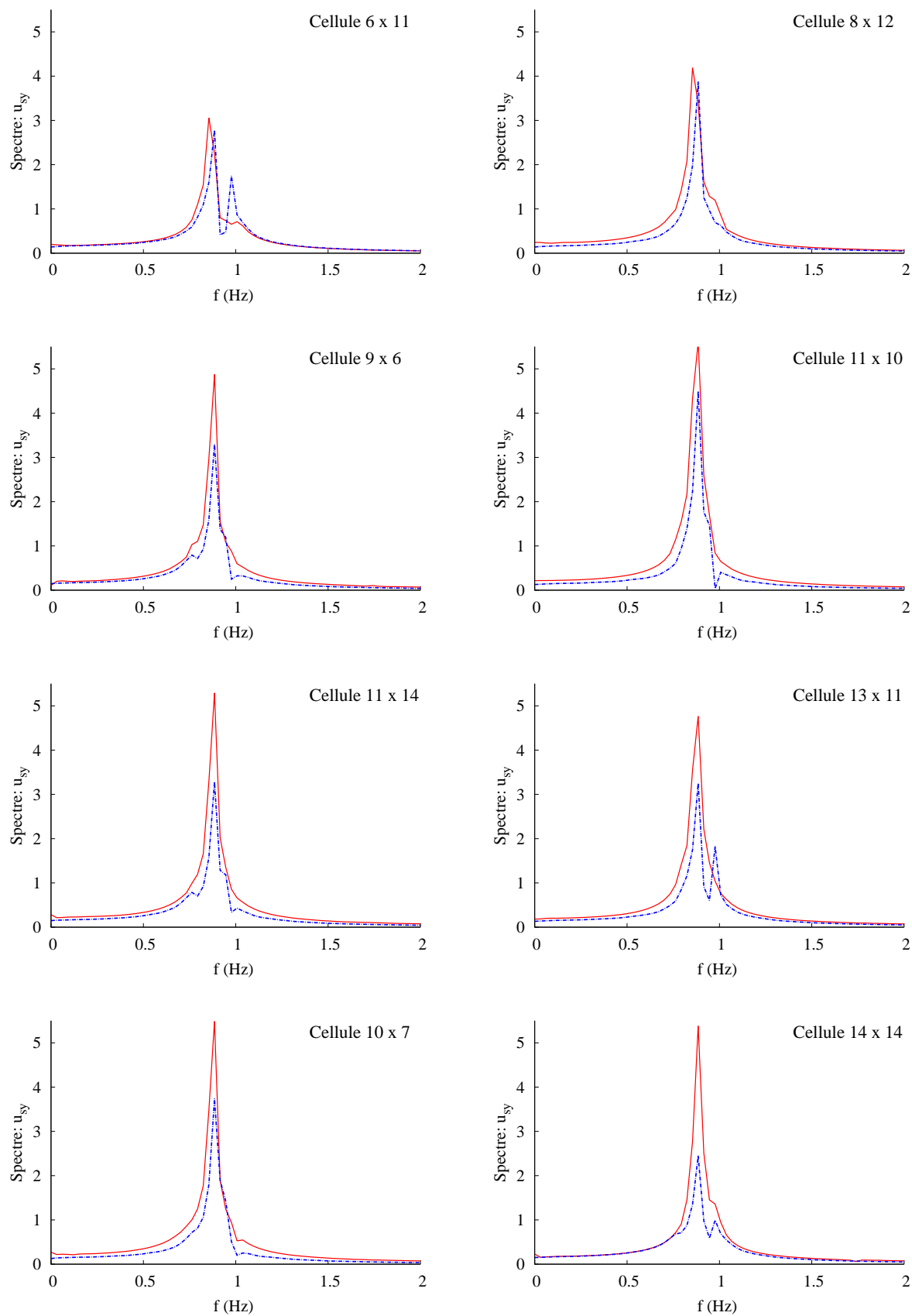


TABLE 6.5 – Comparaison entre les spectres de la réponse en déplacement $u_{sy} = (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y)$ issus des simulations à l'échelle microscopique : — et macroscopique : - - -.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ces travaux s'inscrivent dans un programme de recherche visant à simuler numériquement, et à moindre coût, les phénomènes vibratoires dans les systèmes tubulaires de grande dimension. Pour les applications industrielles visées, la dynamique des tubes est fortement impactée par la présence du fluide interstitiel. De ce fait, la description de l'écoulement dans les faisceaux s'avère nécessaire afin d'en restituer au mieux les contributions mécaniques. La simulation fine des interactions fluide-structure est numériquement hors de portée pour la taille des systèmes concernés, ce qui motive le recours à des modèles simplifiés ne restituant que les phénomènes prédominants.

Dans ce contexte, cette thèse a pour objet de modéliser le couplage fluide-structure, pouvant survenir dans les faisceaux de grande taille. Pour ce faire, une approche multi-échelle est adoptée pour tirer profit du coût modeste de la description macroscopique, et à la fois, de la précision des informations microscopiques. La dérivation du modèle macroscopique est basée sur une *méthode d'homogénéisation*, ou de *changement d'échelle*, du problème équivalent défini à l'échelle microscopique. Et la modélisation microscopique correspond à une description spatiale du problème vérifiant l'approximation du milieu continu.

Vis-à-vis des modèles existants, le travail de développement s'est focalisé sur la prise en compte de la convection dans le calcul des champs hydrodynamiques, mais surtout, sur la possibilité de restituer des réponses vibratoires variées au sein d'un même système ; soit la description de mouvements individuels par structure. Pour être mise en œuvre, la méthode proposée ne requiert pas de mesures expérimentales, ce qui permet d'envisager une variété d'applications.

Synthèse des travaux

La méthode d'homogénéisation choisie pour dériver le problème macroscopique est la prise de moyenne volumique. Cette technique offre un cadre mathématique rigoureux, permettant de restituer chaque mécanisme de transport mis en jeu dans les milieux hétérogènes ; et notamment les effets convectifs d'un écoulement. La mise en œuvre la plus courante de cette méthode consiste à intégrer les équations gouvernant le problème défini à l'échelle microscopique, et écrites sous forme locale. Des limitations de cette approche sont mises en évidence dans la littérature

pour les milieux spatialement périodiques (tels que les faisceaux de tubes), ce qui motive le choix d'une prise de moyenne basée sur l'intégration des équations microscopiques écrites sous forme intégrale (*Chapitre 01*). Par ailleurs, une étude numérique de chaque approche est menée pour un écoulement de Darcy périodique, confortant le choix de la prise de moyenne intégrale pour l'homogénéisation des faisceaux.

Le modèle développé tient compte des éventuelles singularités dynamiques entre structures. De ce fait, le problème macroscopique gouvernant un faisceau n'est pas continu dans l'espace et nécessite d'être résolu de façon discrète. Tout système tubulaire est alors défini comme une juxtaposition de volumes de contrôles, disposés périodiquement et appelés cellules de base. Chaque cellule est alors porteuse de l'information associée à un tube donné au cours du temps.

L'homogénéisation aboutit à un système d'équations gouvernant les interactions fluide-solide à l'échelle cellulaire. Ces équations sont couplées par un terme source en quantité de mouvement, traduisant les charges hydrodynamiques exercées sur une structure donnée. Cette charge dépend de l'écoulement microscopique au voisinage d'une interface fluide-solide, et nécessite d'être exprimée en fonction des grandeurs macroscopiques: en d'autres termes, cette force à modéliser représente une loi de fermeture du problème homogénéisé.

À partir des modèles existants, on propose une loi traduisant les charges fluides exercées sur une structure pouvant être fixe ou mobile. La formulation retenue met en jeu des coefficients a priori inconnus. Une méthode d'estimation est mise en œuvre à partir de la solution numérique de l'écoulement microscopique, calculée sur un domaine réduit représentatif: ce domaine a des propriétés géométriques et mécaniques identiques au large système de référence, mais présente un nombre de structures considérablement réduit par rapport à ce dernier. Cette méthode de fermeture s'avère pertinente pour des faisceaux de cylindres sujets à des vibrations amorties au cours du temps (*Chapitre 02*). Aussi, cette fermeture induit une dépendance de la solution macroscopique vis-à-vis de la solution d'un problème microscopique similaire: c'est en ce sens que la modélisation adoptée est multi-échelle.

Les capacités prédictives du modèle homogénéisé sont évaluées en comparaison avec des données de référence, issues de simulations numériques dans des faisceaux de grande dimension. Les résolutions numériques, microscopiques comme macroscopiques, sont réalisées avec *Code_Saturne*, un code CFD basé sur la méthode des volumes finis (*Chapitre 03*).

Le problème macroscopique est formulé en description eulérienne et sa résolution cellulaire (ou discrète) est basée sur un maillage fixe et indéformable. Cette prédisposition numérique impose un cadre sur la configuration dynamique des cas tests à considérer: pour tout faisceau simulé, les déplacements de chaque structure sont bornés par les frontières de la cellule de base associée. En effet, chaque cellule représente un volume de contrôle pour la résolution du problème macroscopique; et la restriction sur les amplitudes de déplacement permet de garantir des résultats portés sur une structure dans son intégralité.

Des cas tests de la méthode multi-échelle sont réalisés pour des faisceaux de tubes cylindriques et des faisceaux de tubes hexagonaux. Chaque système de référence présente une variété de réponses en déplacement que le modèle homogénéisé restitue avec un accord satisfaisant. Néanmoins, en configuration hexagonale, le confinement particulièrement important des structures donne lieu à un couplage de modes difficilement reproduit par le modèle homogénéisé (*Chapitre 4*). Sur la base des tests réalisés, l'approche multi-échelle mise en œuvre reste un bon compromis entre le coût des réalisations numériques et la précision attendue des données vibratoires et hydrodynamiques.

Perspectives

- Ce travail de thèse ouvre des perspectives portant sur la **méthode numérique** à adopter pour la résolution discrète du problème homogénéisé. La restriction sur les amplitudes vibratoires peut être levée si le volume de contrôle qui matérialise une structure donnée est gouverné par le mouvement de cette dernière. En d'autres termes, pour conserver une description individuelle par tube, il faudrait envisager une méthode numérique pour laquelle chaque volume de contrôle serait fixe par rapport au référentiel de sa structure associée, et mobile par rapport à celui de l'observateur¹, et ceci, en préservant une description eulérienne de l'écoulement.
- D'autre part, l'enrichissement du **modèle de charge hydrodynamique** par des termes quadratiques en vitesse fluide et/ou structure est une proposition à étudier en vue d'une extension de l'approche homogène vers des applications plus complexes. Par exemple, il s'avère que la méthode de fermeture proposée ne s'adapte pas à la simulation des vibrations auto-entretenues au cours du temps (*Chapitre 06*): dans ce cas de figure, il convient de déterminer si cela tient de la loi de fermeture, du type de domaine réduit à considérer, ou des deux à la fois.
- Les **déformations axiales des structures** ne sont pas considérés dans la présente étude, et pourraient être prises en compte par un modèle de poutre 3D, en substitution à celui de l'oscillateur harmonique. Il conviendrait alors d'adapter la formulation des charges pariétales hydrodynamiques à ce type de description afin de tenir compte au mieux des contributions axiales de l'écoulement sur les réponses vibratoires: il s'agirait, par exemple, d'opter pour un modèle traduisant un couplage entre les différentes composantes vectorielles de la force pariétale (Païdoussis [45, 46]).
- Enfin, ces travaux pourraient donner lieu à des développements complémentaires visant à tenir compte des **phénomènes thermiques et turbulents**, dans l'optique d'une industrialisation de l'approche. Pour ce faire, la méthode de changement d'échelle par prise de moyenne s'applique aux équations de transport gouvernant ces mêmes mécanismes à l'échelle micro-

1. Dans cette thèse, le volume de contrôle est mobile par rapport à la structure et fixe par rapport à l'observateur.

scopique. Néanmoins, une description macroscopique de la turbulence nécessite d'adapter le processus de changement d'échelle par prise de moyenne. En plus de l'opérateur de moyenne volumique, il convient d'appliquer un opérateur de *moyenne temporelle* aux équations de bilan microscopiques: l'utilisation d'un filtre temporel aboutit à une formulation de type *RANS*², mettant en jeu des inconnues supplémentaires à modéliser. Cette approche a fait l'objet de plusieurs travaux en configuration de faisceaux tubulaires fixes et indéformables (De Lemos [36], Chanderis [12, 11], Drouin [15, 16]), mais son extension vers un modèle fiable et prédictif des interactions fluide-structure reste une perspective à étudier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ANGELI, *Simulation multirésolution et multiéchelle de la thermohydraulique des assemblages de réacteur à neutrons rapides.*, PhD thesis, Université de Grenoble, 2011.
- [2] F. ARCHAMBEAU AND V. GUIMET, *Description et mise en œuvre d'un prototype de module ale dans le solveur commun*, Rapport EDF HE-41/99/030/1, (1999).
- [3] F. ARCHAMBEAU, N. MÉCHITOUA, AND M. SAKIZ, *A finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows, industrial applications*, International Journal on Finite Volumes, Vol. **1**, (2004).
- [4] P. BEARMAN, *Circular cylinder wakes and vortex-induced vibrations*, Journal of Fluids and Structures 27 (2011) 648–658, (2011).
- [5] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS, AND G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam, North-Holland, 1978.
- [6] J. BERLAND AND E. DERI, *Large-eddy simulation of cross-flow induced vibrations of a single flexible tube in a normal square tube array*, Proceedings of the ASME 2014 Pressure Vessels & Piping Division Conference (PVP2014), , Anaheim, USA, (July 20-24, 2014).
- [7] P. BESSE, *Pratique de la modélisation statistique*, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2003.
- [8] U. BIEDER AND E. GRAFFARD, *Qualification of the cfd code Trio_U for full scale nuclear reactor applications*, In Proc. of CDF4NRS, Benchmarking of CFD code for Application to Nuclear Reactor Safety, Munich Germany, (2006).
- [9] M. BONNET AND A. FRANGI, *Analyse des solides déformables par la méthodes des éléments finis*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2007.
- [10] R. CHAN, *A generalized arbitrary lagrangian-eulerian method for incompressible flows with sharp interfaces*, Journal of Computational Physics, vol. 17, pp. 311-331, (1975).
- [11] M. CHANDERIS, M. SERRE, AND P. SAGAUT, *A macroscopic turbulence model for flow in porous media suited for channel, pipe and rod bundle flows*, Int. J. Heat Mass Transfer, **49** : 2739-2750, (2006).
- [12] M. CHANDESRI, *Modélisation des écoulements turbulents dans les milieux poreux et à l'interface avec un milieu libre*, PhD thesis, Université de Paris VI, Décembre 2006.

- [13] S. S. CHEN, M. WAMBSGANSS, AND J. A. JENDRZEJCZYK, *Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.43, p.325-329, (1976).
- [14] J. COIRIER, *Mécanique des milieux continus*, DUNOD, 2001.
- [15] M. DROUIN, *Modélisation des écoulements turbulents anisothermes en milieu macroporeux par une approche de double filtrage*, PhD thesis, Université de Toulouse, Décembre 2010.
- [16] M. DROUIN, O. GRÉGOIRE, O. SIMONIN, AND A. CHANOINE, *Macroscopic modeling of thermal dispersion for turbulent flows in channels*, Int. J. Heat Mass Transfer 53, 2206–2217M., (2010).
- [17] P. DUMAZ, N. ALPY, D. BROU, M. BUCCI, J. CARDOLACCIA, C. GUENAUT, E. HOURCADE, L. MARTIN, J. JOLLY, P. MASONI, V. PASCAL, N. SIMON, AND N. SCHMIDT, *New investigations of the phenix negative reactivity events*, CEA, ICAPP 2012 communication (<http://icapp.ans.org/icapp12/program/abstracts/12456.pdf>), (2012).
- [18] A. ERINGER AND E. SUHUBI, *Nonlinear theory of simple microelastic solids - i*, Int. J. Engng. Sci. Vol. 2, pp. 189-203, (1963).
- [19] P. GERMAIN, *Mécanique, tome I*, École polytechnique, Ellipse, 1986.
- [20] S. GRANGER AND M. PAÏDOUSSIS, *An improvement to the quasi-steady model with application to cross-flow-induced vibration of tube arrays*, Journal of Fluid Mechanics 320, 163-184, (1996).
- [21] W. GRAY AND S. HASSANIZADEH, *Macroscale continuum mechanics for multiphase porous-media flow including phases, interfaces, common lines and common points*, Advances in Water Ressources 21, 261-281, (1998).
- [22] W. GRAY AND P. LEE, *On the theorems for local volume averaging of multiphase systems*, Int. J. Multiphase Flow, Vol. 3, pp. 333-340, (1977).
- [23] L. HAMMAMI, *Contribution à l'étude de l'interaction fluide-structure dans les faisceaux de tube par une technique d'homogénéisation*, PhD thesis, Université de Pierre et Marie-Curie (Paris 6), 1990.
- [24] S. HASSANIZADEH AND W. GRAY, *General conservation equations for multi-phase systems : 1. averaging procedure*, Advances in Water Ressources 2, 131, (1979).
- [25] ———, *General conservation equations for multi-phase systems : 2. mass, momenta, energy and entropy equations*, Advances in Water Ressources 2, 191, (1979).
- [26] F. HOVER, S. MILLER, AND M. TRIANTAFYLLOU, *Vortex-induced vibration of marine cables : Experiments using force feedback*, J. Fluids Struct. 11, 306–326., (1997).
- [27] F. HOVER, A. TECHET, AND M. TRIANTAFYLLOU, *Forces on oscillating uniform and tapered cylinders in crossflow*, Journal of Fluid Mechanics, 363, pp. 97–114, (1998).

- [28] F. HOWES AND S. WHITAKER, *The spatial averaging theorem revisited*, Chemical Engineering Science, Vol. **40**, No 8, pp.1387-1392, (1985).
- [29] F. HUVELIN, *Couplage de codes en interaction fluide-structure et applications aux instabilités fluide-élastiques*, PhD thesis, École doctorale des Sciences de l'Ingénieur de Lille, 2008.
- [30] E. JAQUELIN, D. BROCHARD, C. TROLLAT, AND L. JEZEQUEL, *Homogenisation of non-linear array of confined beams*, Nuclear Engineering and Design, 165(1-2), 213-223, (1996).
- [31] Y. JUS, *Modélisation et simulation numérique de vibrations induites par écoulements autour d'obstacles cylindriques seuls ou en réseaux*, PhD thesis, Université de Pierre et Marie-Curie (Paris 6), 2011.
- [32] A. KHALAK AND C. WILLIAMSON, *Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping*, Journal of Fluids and Structures 10 (5), 455-472, (1996).
- [33] ———, *Fluid forces and dynamics of a hydroelastic structure with very low mass and damping*, Journal of Fluids and Structures 11 (8), 973-982, (1997).
- [34] ———, *Investigation of relative effects of mass and damping in vortex-induced vibration of a circular cylinder*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 69, 341-350, (1997).
- [35] ———, *Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping*, Journal of Fluids and Structures 13 (7), 813-851, (1999).
- [36] M. D. LEMOS, *Turbulence in Porous Media : Modeling and application*, Elsevier, 2006.
- [37] J. LIENHARD, *Synopsis of lift, drag and vortex frequency data for rigid circular cylinder*, Washington State University, College of Engineering, Research Division Bulletin 300, 1966.
- [38] E. LONGATTE, F. BAJ, M. BRAZA, Y. HOARAU, D. RUIZ, AND C. CANTENEUR, *Advanced numerical methods for uncertainty reduction on prediction of heat exchanger dynamic stability limits : review and perspectives*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 258, pp. 164– 175, (2013).
- [39] A. MALHOTRA AND J. PENZIEN, *Stochastic analysis of offshore tower structures*, University of California, Berkeley, Earthquake Engineering Research Center, 1969.
- [40] EDF R&D, *Algorithmes d'intégration temporelle de l'opérateur DYNA_TRAN_MODAL*, Documentation de Code_Aster, 2004.
- [41] ———, *Code_Saturne 2.1.4 : Theory and Programmer's Guide*, Code_Saturne documentation, 2012.
- [42] G. MOE AND R. L. P. VERLEY, *An investigation into the hydrodynamic damping of cylinders oscillated in steady currents of various velocities*, Report of the River and Harbour Laboratory, Norwegian Institute of Technology, 1978.

- [43] J. MORISON, *The force distribution exerted by surface waves on piles*, Technical Report Serie 3, Issue 345, University of California, (1953).
- [44] J. MORISON, M. O'BRIEN, J. JOHNSON, AND S. SOHAAF, *The forces exerted by surface waves on piles*, Petroleum Transactions, A.I.M.E., Vol. 189, (1950).
- [45] M. PAÏDOUSSIS, *Fluid-structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow, Volume 1*, Academic Press, 1998.
- [46] ———, *Fluid-structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow, Volume 2*, Academic Press, 2004.
- [47] M. PAÏDOUSSIS, S. PRICE, AND E. DE LANGRE, *Fluid-structure Interactions : Cross-Flow-Induced Instabilities*, Cambridge University Press, 2011.
- [48] M. PAÏDOUSSIS, S. PRICE, T. NAKAMURA, B. MARK, AND W. N. MURETHI, *Flow-induced vibrations and instabilities in a rotated-square cylinder array in cross-flow*, Journal of Fluids and Structures 3, 229-254., (1989).
- [49] M. PETTIGREW, C. TAYLOR, AND A. YASUO, *Vibration damping of heat exchanger tube bundles in two-phase flow*, Welding Research Council, Bulletin 389, pp 242-256, (1991).
- [50] S. PRICE, *A review of theoretical models for fluidelastic instability of cylinder arrays in cross-flow*, Journal of Fluids and Structures 9, 463-518, (1995).
- [51] S. PRICE, B. MARK, AND M. PAÏDOUSSIS, *An experimental stability analysis of a single flexible cylinder in an array of rigid cylinders and subject to cross flow.*, ASME Journal of Pressure Vessel Technology 108, 62-72., (1986).
- [52] S. PRICE AND M. PAÏDOUSSIS, *An improved mathematical model for the stability of cylinder rows subject to cross-flow*, J. Sound Vib. 97, 615-640, (1984).
- [53] ———, *A single-flexible-cylinder analysis for the fluidelastic instability of an array of flexible cylinders in cross-flow*, ASME Journal of Fluids Engineering 108, 193-199., (1986).
- [54] S. PRICE, M. PAÏDOUSSIS, R. MACDONALD, AND B. MARK, *The flow-induced vibration of a single flexible cylinder in a rotated square array of rigid cylinders with pitch-to-diameter ratio of 2.12*, Journal of Fluids and Structures 1, 359-378., (1987).
- [55] M. QUINTARD AND S. WHITAKER, *Transport in ordered and disordered porous media i : Cellular average and the use of weighting functions*, Transport in Porous Media 14 : 163-177, (1994).
- [56] ———, *Transport in ordered and disordered porous media ii : Generalized volume averaging*, Transport in Porous Media 14 : 179-206, (1994).
- [57] R. RAKOTOMALALA, *Pratique de la régression linéaire multiple: diagnostic et sélection de variables*, Université Lumière, Lyon II, 2011.
- [58] G. RICCIARDI, *Une approche milieu poreux pour la modélisation de l'interaction fluide-structure des assemblages de combustibles dans un cœur de réacteur à eau pressurisée :*

- Simulation et expérimentation.*, PhD thesis, Université de Provence (Aix-Marseille I), Septembre 2008.
- [59] G. RICCIARDI, S. BELLIZZI, B. COLLARD, AND B. COCHELIN, *Modelling pressurized water reactor cores in terms of porous media*, Journal of Fluids and Structures 25, 112-113, (2009).
 - [60] R. ROGERS, C. TAYLOR, AND M. PETTIGREW, *Fluid effects on multi-span heat-exchanger tube vibration.*, ASME Pressure Vessel end Piping Conference, San Antonio, Texas, (1984).
 - [61] P. SAGAUT, *Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows - An introduction, Third Edition*, Springer, 2005.
 - [62] J. SANCHEZ-HUBERT AND E. SANCHEZ-PALANCIA, *Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson, 1992.
 - [63] E. SANCHEZ-PALANCIA, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics n°127, Berlin, Springer, 1980.
 - [64] T. SARPKEYA, *Vortex shedding end resistance in harmonic flow about smooth and rough circular cylinders at high reynolds numbers*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, (1976).
 - [65] J. SIGRIST AND D. BROCC, *Dynamic analysis of a tube bundle with fluid-structure interaction modeling using a homogeneisation method*, Computer Methods in Applied Mechanics en Engineering, 197, 1080-1099, (2008).
 - [66] J. SLATTERY, *Flow of viscoelastic fluids through porous media*, A.I.Ch.E JI 13, 1066-1071, (1967).
 - [67] B. SUMER AND J. FREDSE, *Hydrodynamics Around Cylindrical Structures*, River Edge, NJ : World Scientific, 1997.
 - [68] P. L. TALLEC, *Modélisation et calcul des milieux continus*, Édition de l'École polytechnique, 2012.
 - [69] H. TANAKA AND S. TAKAHARA, *Fluid elastic vibration of tube array in cross flow*, Journal of Sound and Vibration, 77(1), 19-37, (1981).
 - [70] H. TANAKA, K. TANAKA, AND F. SHIMIZU, *Fluidelastic analysis of tube bundle vibration in cross-flow*, Journal of Fluids and Structures, 16(1), 93-112, (2002).
 - [71] A. TECHET, *Hydrodynamics for Ocean Engineers*, MIT Dept. Mechanical Engineering Center for Ocean Engineering, Lecture Notes, 2004.
 - [72] D. TENCHINE, V. BARTHEL, U. BIEDER, F. DUCROS, G. FAUCHET, C. FOURNIER, B. MATHIEU, F. PERDU, P. QUEMERE, AND S. VANDROUX, *Status of trio_u code for sodium cooled fast reactors*, Nuclear Engineering and Design, Volume 242, January 2012, Pages 307–315, (2011).

- [73] V. VEVERKA, *Theorem for the local volume average of a gradient revisited*, Chem. Engng. Sci. **36**, 833-838, (1981).
- [74] C. WEN AND C. LIN, *Two-dimensional vortex shedding of a circular cylinder*, Physics of Fluids, Vol. 13, No.3, pp. 557-560, (2001).
- [75] S. WHITAKER, *Diffusion and dispersion in porous media*, A.I.Ch.E JI 13, 420-427, (1967).
- [76] ———, *Advances in theory of fluid motion in porous media*, Ind. Engng Chem. 61, 14-28, (1969).
- [77] C. WILLIAMSON, *Vortex dynamics in the cylinder wake*, Annual Review of Fluid Mechanics Vol. 28 : 477-539, (1996).

ANNEXES

THÉORÈMES DE LA PRISE DE MOYENNE

La prise de moyenne des équations gouvernants les phénomènes microscopiques nécessite l'application de théorèmes de permutation entre les opérateurs intégrale volumique et dérivées partielles afin d'obtenir la formulation du problème équivalent macroscopique. Des démonstrations de ces règles sont proposées par Slattery [66], Whitaker [75, 76] ainsi que Gray et Lee [22]. Afin de comprendre les hypothèses constitutives de cette théorie, cette section reprend la démonstration issue de l'article *On the theorems for local volume averaging of multiphase systems* (1977) de Gray et Lee [22].

A.1 Permutation Intégrale volumique - Dérivée spatiale

THÉORÈME I

$$\langle \nabla \varphi_\alpha \rangle = \nabla \langle \varphi_\alpha \rangle + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \mathbf{n}_\alpha \varphi \, ds \quad (\text{A.1})$$

DÉRIVABILITÉ MACROSCOPIQUE La permutation entre une intégrale de volume et une dérivée spatiale permet mettre en relation entre le gradient $\nabla_{\mathbf{x}}$ d'une quantité moyenne $\langle \varphi \rangle(\mathbf{x}, t)$ avec le gradient $\nabla_{\boldsymbol{\xi}}$ d'une quantité locale $\varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)$. Le processus de permutation d'un gradient avec l'intégrale implique néanmoins de préserver d'une échelle à l'autre les propriétés de dérivabilités spatiales des opérateurs mis en jeu. Pour assurer une dérivabilité similaire d'une échelle à l'autre, on introduit un opérateur de gradient ∇ tel que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \quad (\text{A.2})$$

Le cadre de la démonstration du théorème de permutation un gradient et une intégrale de volume implique alors un taux de variation spatiale de la position \mathbf{x} du centre d'un VER identique au taux de variation spatiale régissant le caractère *continu* de l'échelle microscopique.

DÉMONSTRATION En tenant compte de la relation (1.6), la moyenne superficielle d'un gradi-

ent local s'exprime :

$$\langle \nabla \varphi_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} [\nabla \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)] \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv ,$$

soit immédiatement :

$$\langle \nabla \varphi_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \nabla [\varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)] dv - \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) [\nabla \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)] dv .$$

La relation (1.4) entraîne :

$$\langle \nabla \varphi_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \nabla [\varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)] dv + \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{n}_\alpha^k \delta(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k) dv .$$

$\delta(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k)$ est une *distribution spatiale de Dirac*, nulle dans tout le domaine hétérogène excepté aux interfaces entre les phases α et β . L'intégrale volumique impliquant cette fonction de Dirac est donc non-nulle uniquement sur l'ensemble $\Gamma_{\alpha\beta}$ des points singuliers appartenant à ces interfaces $\Gamma_{\alpha\beta}^k$, et devient :

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{n}_\alpha^k \delta(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k) dv = \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}^k} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{n}_\alpha^k ds ,$$

ce qui entraîne :

$$\langle \nabla \varphi_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \nabla [\varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)] dv + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{n}_\alpha ds .$$

D'autre part, le volume d'intégration est indépendant de la variable spatiale : sa forme, sa taille et son orientation sont invariants quelque soit la position \mathbf{x} du VER considéré. Et la fonction $\varphi \gamma_\alpha$ étant définie en tout point du domaine hétérogène Ω , l'intégration du gradient est égal au gradient de l'intégration ; cela entraîne :

$$\langle \nabla \varphi_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \rangle = \nabla \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) dv \right] + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \mathbf{n}_\alpha ds .$$

Le **Théorème I** de permutation entre une intégrale volumique et un gradient spatial sur un domaine hétérogène s'écrit finalement :

$$\langle \nabla \varphi_\alpha \rangle = \nabla \langle \varphi_\alpha \rangle + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \mathbf{n}_\alpha \varphi ds$$

Par extension à l'opérateur de divergence, on obtient :

$$\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_\alpha \rangle = \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\varphi}_\alpha \rangle + \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \mathbf{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varphi} \, ds \quad (\text{A.3})$$

A.2 Permutation Intégrale volumique - Dérivée temporelle

THÉORÈME II

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \varphi_\alpha \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \boldsymbol{\varphi} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_\alpha) \, ds \quad (\text{A.4})$$

DÉMONSTRATION En tenant compte de la relation (1.6), la moyenne superficielle d'une dérivée partielle en temps s'exprime :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right\rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right] \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \, dv ,$$

soit immédiatement :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right\rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t)] \, dv - \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \left[\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right] \, dv .$$

Le volume d'intégration étant indépendant du temps (sa forme, sa taille et son orientation ne varient pas pour un volume d'intégration donné), et la fonction $\boldsymbol{\varphi} \gamma_\alpha$ étant définie continûment sur le domaine Ω , la dérivée partielle en temps peut permuter avec l'intégrale volumique ; Il vient donc :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \gamma_\alpha(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \, dv \right] - \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \left[\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right] \, dv .$$

Soit :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_\alpha \rangle(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \left[\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) \right] \, dv .$$

Si pour un volume Ω donné, la phase α présente un mouvement relatif à sa phase complémentaire β , alors sa fonction indicatrice γ_α varie au cours du temps. Si la position d'un point matériel M quelconque et constitutif de Ω est repéré par le vecteur $\mathbf{OM} = \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, alors la dérivée totale de $\gamma_\alpha(\mathbf{x}, t)$ s'écrit donc :

$$\frac{D\gamma_\alpha}{Dt} = \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t} + \frac{Dx_i}{Dt} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i}$$

D'où (en omettant les variables spatio-temporelles) :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_\alpha \rangle - \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{D\gamma_\alpha}{Dt} - \frac{Dx_i}{Dt} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i} \right] dv.$$

Pour tout $M \in \Gamma_{\alpha\beta}$, la vitesse d'interface \mathbf{W} représente la dérivée totale du vecteur position \mathbf{OM} au cours du temps :

$$\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{W}$$

Dans le cadre de la prise de moyenne, la fonction de distribution γ_α est supposée invariable au cours du temps par rapport à un observateur situé sur la frontière extérieure d'un VER donné, de vecteur position \mathbf{x} donné. Cela se traduit par :

$$\frac{D\gamma_\alpha}{Dt} = 0 \quad (\text{A.5})$$

et entraîne :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi \rangle + \frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi \left[W_i \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i} \right] dv$$

En tenant compte du résultat obtenu pour le calcul du gradient de γ_α (cf. équation (1.4)), on en déduit :

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) \left[W_i \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial x_i} \right] dv = -\frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) [\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_\alpha^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k)] dv.$$

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k)$ est une *distribution spatiale de Dirac* qui est nulle dans tout le domaine hétérogène excepté aux interfaces entre les phases α et β . L'intégrale volumique impliquant cette fonction de Dirac est donc non-nulle uniquement sur l'ensemble $\Gamma_{\alpha\beta}$ des points singuliers appartenant à ces interfaces $\Gamma_{\alpha\beta}^k$. Cela entraîne :

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega} \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) [\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_\alpha^k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha\beta}^k)] dv = \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}^k} \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) [\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_\alpha^k] ds.$$

Finalement, le **Théorème II** sur la permutation entre une intégrale volumique et une dérivée partielle en temps s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \varphi_\alpha \rangle}{\partial t} - \frac{1}{V} \int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \varphi (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_\alpha) ds$$

Annexe B

GÉNÉRALITÉS SUR LES LOIS DE BILAN

On souhaite faire le bilan au cours du temps d'une grandeur $G(t)$ associée à un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. Le domaine Ω est strictement inclus dans le système matériel S représentant l'ensemble des particules du milieu étudié. La grandeur $G(t)$ est considérée scalaire. D'un point de vue phénoménologique, on recense trois types de mécanismes pouvant être responsables de la variation de $G(t)$ au cours du temps. Premièrement, si Ω est animé d'un mouvement propre par rapport au milieu matériel S , il y a des entrées et des sorties de matière transportant $G(t)$ à travers la frontière $\partial\Omega$. Ce phénomène représente les échanges de la quantité $G(t)$ par **convection**. Par ailleurs, il peut également y avoir des entrées et sorties de $G(t)$ sans que Ω ne soit animé d'un mouvement propre par rapport au milieu matériel. Ce phénomène représente les échanges de la quantité $G(t)$ par **diffusion**. Enfin, il peut y avoir au sein de Ω des mécanismes qui "retire" ou "fournit" de la quantité $G(t)$ que l'on désigne respectivement par des **puits** ou **sources** de $G(t)$. Schématiquement, le bilan de la grandeur $G(t)$ au sein de Ω se résume par :

$\text{TAUX DE VARIATION de } G \text{ dans } \Omega = \text{ÉCHANGES de } G \text{ à travers } \partial\Omega + \text{SOURCES/PUITS de } G \text{ dans } \Omega$

L'existence d'échanges par convection à travers la frontière $\partial\Omega$ dépend de la nature du volume de contrôle qui caractérise le domaine Ω . On compte trois types de volumes de contrôle pour lesquels des équations de bilan peuvent être établies :

- Un **volume de contrôle non-matériel** (ou **domaine géométrique**) est animé d'un mouvement propre par rapport au référentiel d'étude. Ce mouvement est différent de celui des particules qui le "traversent" au cours du temps et est caractérisé par un champ de vitesse \mathbf{W} défini sur sa frontière.
- Un **volume de contrôle fixe et non-matériel** (ou **domaine géométrique fixe**) est fixe par rapport au référentiel d'étude et laisse passer de la matière à travers sa frontière. Un tel domaine correspond au cas particulier où $\mathbf{W} = \vec{0}$.
- Un **volume de contrôle matériel** (ou **domaine matériel**) est toujours constitué des mêmes particules. Chaque particule d'un tel volume est animée de la même vitesse \mathbf{V} par rapport

au référentiel d'étude. Un tel domaine possède donc une frontière impermable et ne permet pas les entrées et sorties de matières. Ce domaine correspond au cas particulier où $\mathbf{W} = \mathbf{V}$.

L'écriture des équations de bilan de $G(t)$ dépend donc de la nature du volume de contrôle dans lequel on évalue son taux de variation. Pour illustrer cette dépendance, les équations de bilan de la grandeur $G(t)$ sont formulées pour chaque type de volume de contrôle. La quantité $G(t)$ est reliée à sa *densité massique* g par la relation suivante:

$$G(t) = \int_{\Omega} g \, dm = \int_{\Omega} \rho \, g \, dv$$

Le *flux convectif* de G à travers la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω s'écrit:

$$\Phi_c = \int_{\partial\Omega} \rho g \, \mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n} \, dS$$

où $\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{W}$ est la *vitesse relative* du milieu matériel par rapport au domaine Ω et \mathbf{n} la normale orientée vers l'extérieur de Ω . Le *flux diffusif* de G à travers la frontière $\partial\Omega$ s'écrit:

$$\Phi_d = \int_{\partial\Omega} \vec{\phi}_d \cdot \mathbf{n} \, dS$$

où $\vec{\phi}_d$ est la *densité surfacique de flux diffusif*. Enfin, les sources et/ou puits de quantité $G(t)$ au cours du temps seront exprimés par le terme G^* . Les différentes écritures du bilan de $G(t)$ sont les suivantes:

- **Volume non-matériel animé d'un mouvement propre, tel que $\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{W}$:**

$$\frac{dG}{dt} + \Phi_c = -\Phi_d + G^*$$

\Rightarrow

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho g \, dv + \int_{\partial\Omega} \rho g (\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_{\partial\Omega} \vec{\phi}_d \cdot \mathbf{n} \, dS + G^* \quad (\text{B.1})$$

- **Volume fixe et non-matériel, tel que $\mathbf{V}_r = \mathbf{V}$:**

$$\frac{dG}{dt} + \Phi_c = -\Phi_d + G^*$$

\Rightarrow

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho g \, dv + \int_{\partial\Omega} \rho g (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dS = - \int_{\partial\Omega} \vec{\phi}_d \cdot \mathbf{n} \, dS + G^* \quad (\text{B.2})$$

- *Volume matériel, tel que $V_r = \vec{0}$:*

$$\frac{dG}{dt} = -\Phi_d + G^*$$

\Rightarrow

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho g \, dv = - \int_{\partial\Omega} \vec{\phi}_d \cdot \mathbf{n} \, dS + G^* \quad (\text{B.3})$$

Pour aller plus loin sur le développement de ces lois de bilan (notamment sur la signification de l'opérateur $\frac{d}{dt}$ qui diffère selon la nature du domaine considéré)¹, on pourra se référer aux ouvrages dédiés à la modélisation mécanique des *milieux continus*, et en particulier à ceux de P. Germain [19], de J. Coirier [14] et de P. Le Tallec [68] qui ont largement guidés cet exposé.

1. On parlera de *dérivée particulière* pour des domaines matériels et de *dérivation par rapport au temps* pour des domaines non-matériels. Ces deux types de dérivées sont conceptuellement différents de part la nature du champ de vitesse auquel ils dépendent.

